

ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE  
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À  
L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

COMME EXIGENCE PARTIELLE  
À L'OBTENTION DE LA MAÎTRISE EN GÉNIE MÉCANIQUE  
M.Eng.

PAR  
FRANÇOIS DUCHAINE

GÉNÉRATION DE MAILLAGE STRUCTURÉ PAR KRIGEAGE  
AVEC RAFFINEMENT ELLIPTIQUE LOCAL

MONTREAL, LE 3 SEPTEMBRE 2004

© droits réservés de François Duchaine

CE MÉMOIRE A ÉTÉ ÉVALUÉ  
PAR UN JURY COMPOSÉ DE :

M. Henri Champliaud, directeur de mémoire  
Département de génie mécanique à l'École de technologie supérieure

M. Azzeddine Soulaïmani, président du jury  
Département de génie mécanique à l'École de technologie supérieure

M. Hakim Bouzid, membre du jury  
Département de génie mécanique à l'École de technologie supérieure

IL A FAIT L'OBJET D'UNE SOUTENANCE DEVANT JURY ET PUBLIC  
LE 17 AOÛT 2004  
À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

# **GÉNÉRATION DE MAILLAGE STRUCTURÉ PAR KRIGEAGE AVEC RAFFINEMENT ELLIPTIQUE LOCAL**

François Duchaine

## **Résumé pour la bibliothèque**

Pour concevoir des systèmes mécaniques, les ingénieurs utilisent de plus en plus souvent des méthodes numériques comme les éléments finis pour obtenir un prototype virtuel. L'inconvénient de cette méthode est que les éléments doivent être de petite taille pour obtenir des résultats précis, il faut donc un grand nombre d'éléments pour représenter les pièces mécaniques. Le krigeage, une méthode d'interpolation matricielle, permet de modéliser une pièce existante en passant par tous les points inspectés. Cet aspect est très intéressant en réingénierie. De plus, comme les équations du krigeage sont continues et dérivables, un modèle volumique peut être généré par l'extrusion d'une surface. La possibilité d'ajuster les paramètres de krigeage et de spécifier de nouvelles orientations est offerte afin de représenter adéquatement la pièce à modéliser. Un nouveau schéma de raffinement elliptique local offre une meilleure précision en fonction du nombre d'éléments que les autres modèles de raffinement existants.

# **GÉNÉRATION DE MAILLAGE STRUCTURÉ PAR KRIGEAGE AVEC RAFFINEMENT ELLIPTIQUE LOCAL**

François Duchaine

## **SOMMAIRE**

Pour concevoir des systèmes mécaniques, les ingénieurs utilisent de plus en plus souvent des méthodes numériques comme les éléments finis. L'inconvénient de cette méthode est que les éléments doivent être de petite taille pour obtenir des résultats précis, il faut donc un grand nombre d'éléments pour représenter les pièces mécaniques.

Le krigage est une méthode d'interpolation matricielle se rapprochant de la méthode des moindres carrés, elle a surtout été développée au départ dans le domaine de la minéralogie. Le maillage par krigage permet de générer de façon structurée des éléments quadrangulaires, plus précis à longueur d'arête égale que des triangles. L'avantage de cette technique est qu'elle permet de faire passer le modèle par tous les points inspectés.

De plus, l'équation d'une surface krigée est continue et dérivable. Ce qui permet, en spécifiant une épaisseur, de générer un modèle volumique par extrusion dans une direction normale calculée analytiquement. Une interface interactive montre le modèle graphiquement et offre la possibilité d'ajuster le maillage en modifiant les paramètres de krigage et en spécifiant de nouvelles orientations pour les normales sur les côtés. Par la suite, le maillage est transféré dans un logiciel d'analyse par éléments finis, il ne reste plus qu'à ajouter un type d'éléments, à déterminer un matériau et à appliquer des conditions limites et un chargement au modèle réalisé pour résoudre un problème complet.

Une nouvelle technique de raffinement local de maillage a été développée, appelée schéma de raffinement elliptique dans ce mémoire. Comparativement aux autres modèles existants, le schéma elliptique offre le meilleur taux de raffinement en fonction du nombre d'éléments. Donc une bonne précision est obtenue en moins de temps. Le modèle de raffinement elliptique permet de conserver un maillage conforme aux exigences sur la forme des éléments, ce qui n'est pas le cas pour tous les modèles. De plus, le raffinement elliptique de maillage est très localisé car il est composé d'une zone de transition progressive. Tandis que d'autres modèles interviennent sur quasiment la totalité des éléments.

Finalement, des applications typiques montrent que le schéma de raffinement elliptique peut être appliqué à des cas concrets et les résultats obtenus prouvent son efficacité.

# **STRUCTURED MESH GENERATION BY KRIGING WITH LOCAL ELLIPTIC REFINEMENT**

François Duchaine

## **ABSTRACT**

More and more often engineers use numerical methods like finite element analyses in designing mechanical systems. The inconvenience in obtaining precise results with this method is that the elements must be small in size. As a result, a great number of elements then must be used to describe accurately the mechanical component models.

Kriging is a matrix interpolation that is based on the least square method. This method was initially developed for the mining industry. Kriging is used to represent geometries and to generate structured mesh with quadrangular elements. Four sided elements are more precise than triangular elements of the same dimension. The advantage of this technique is that all inspected points of components are found in the model.

Furthermore, the equation of the kriged surface is continuous and derivable. This allows the generation of a three-dimensional solid model by specifying a constant thickness along analytically calculated normal directions. A graphic user interface shows the model and the mesh can be adjusted by changing the parameters of the kriging and specifying new normal orientations on the edges. The mesh can then be transferred to finite element analysis codes. The element type and the material properties are then specified and the loads and the boundary conditions are also applied to the model to solve a complete problem.

In this thesis a new mesh refinement technique has been developed called elliptic refinement scheme. Comparatively to other existing models, the elliptic scheme has a better refinement ratio as a function of the number of elements. In other words, a better precision in results is obtained in less time than other methods. The elliptic refinement scheme helps to avoid bad shape elements in the mesh. This is not the case for all other refinement schemes. Furthermore, the elliptic refinement is very local within a progressive transition zone, whereas other methods modify practically all the mesh.

Finally, typical applications show that the local elliptic refinement scheme can be applied to real cases while achieving better results compared to other methods.

## **REMERCIEMENTS**

En premier lieu, je tiens à remercier sincèrement mon directeur de recherche et professeur, M. Henri Champlaud, pour son savoir technique, son soutien moral et financier tout au long de ce projet et pour son attitude disciplinaire qui m'a stimulé à toujours repousser mes limites. Je voudrais aussi remercier tous les professeurs du département de génie mécanique, principalement Mme Françoise Marchand et M. Youssef A. Youssef, pour leur confiance, leur appui et leur encouragement.

Je remercie le Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada et l'École de technologie supérieure pour le support financier.

Je dis merci à tous les étudiants que j'ai côtoyés comme collègues et comme étudiants qui m'ont appris à m'améliorer sans arrêt comme pédagogue et comme personne. Un gros merci à mes deux principaux collègues, Abdelmajid et Olivier, et à tous mes autres amis qui ont contribué à me divertir et à me soutenir dans les moments difficiles.

Finalement, je dédie ce mémoire à ma femme, à mes enfants, Tatyana et Jacob, et à mes parents pour avoir cru en moi et pour m'avoir épaulé à votre façon.

## TABLE DES MATIÈRES

	Page
SOMMAIRE .....	iv
ABSTRACT .....	v
REMERCIEMENTS .....	vi
TABLE DES MATIÈRES .....	vii
LISTE DES TABLEAUX.....	ix
LISTE DES FIGURES.....	x
LISTE DES ABRÉVIATIONS ET DES SIGLES.....	xvi
INTRODUCTION.....	1
CHAPITRE 1 revue de la littérature.....	3
1.1 Représentation graphique.....	5
1.2 Choix du type d'éléments.....	6
1.3 Choix du type de maillages .....	8
1.3.1 Maillage structuré.....	8
1.3.2 Maillage non-structuré .....	9
1.3.3 Maillage hybride .....	10
1.4 Objectifs et contributions prévues.....	11
CHAPITRE 2 MAILLAGE DE SURFACES 3D PAR KRIGEAGE .....	12
2.1 Définition du krigeage dual pour les surfaces 3D .....	12
2.2 Développement de l'algorithme et de l'interface .....	17
2.2.1 Inspection des coordonnées réelles .....	17
2.2.2 Sélection des options de krigeage .....	20
2.2.3 Transfert du maillage vers un logiciel d'analyse par éléments finis .....	23
2.3 Exemples de maillages de pièces minces.....	24
CHAPITRE 3 GÉNÉRATION DE VOLUMES PAR EXTRUSION .....	25
3.1 Calcul des normales à la surface .....	26
3.2 Calcul de l'épaisseur maximale .....	26
3.3 Génération de volume à partir de surface .....	27
3.4 Applications .....	29
3.4.1 Exemple d'une pièce sphérique .....	29
3.4.2 Exemple d'une pièce symétrique .....	31
3.4.3 Exemple d'un angle de dépouille pour un outil de coupe.....	33

CHAPITRE 4	RAFFINEMENT LOCAL DU MAILLAGE .....	35
4.1	Introduction .....	35
4.2	Sélection manuelle de la zone critique.....	38
4.2.1	Calcul de la diagonale maximale .....	38
4.2.2	Sélection de l'utilisateur .....	40
4.2.3	Vérification des nœuds à l'intérieur du cercle .....	41
4.2.4	Vérification des éléments à l'intérieur du cercle.....	44
4.2.5	Validation de l'élément sélectionné .....	45
4.2.6	Identification des éléments voisins .....	49
4.3	Développement d'un schéma elliptique pour le raffinement .....	51
4.3.1	Étude sur la distorsion des éléments .....	57
4.3.2	Amélioration du modèle elliptique.....	67
4.3.3	Modification pour l'adaptation sur la frontière .....	76
4.3.4	Incorporation du modèle elliptique dans le maillage grossier .....	78
CHAPITRE 5	COMPARAISON DES MAILLEURS ET APPLICATIONS.....	87
5.1	Introduction .....	87
5.2	Comparaison du modèle elliptique avec les autres schémas.....	88
5.3	Application de la méthode de raffinement dans des cas typiques.....	95
5.3.1	Plaque droite en flexion pure .....	95
5.3.2	Tube à paroi mince en flexion pure.....	98
5.3.3	Plaque trouée en traction pure.....	101
5.3.4	Plaque encochée en traction pure.....	105
5.3.5	Plaque encochée en flexion pure.....	107
5.3.6	Plaque avec changement de section en traction pure .....	109
5.3.7	Plaque avec changement de section en flexion pure.....	112
CHAPITRE 6	PERSPECTIVES.....	114
CONCLUSION	.....	125
RECOMMANDATIONS.....		127
RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES .....		128



## LISTE DES TABLEAUX

	Page
Tableau I	Temps de calcul de 25 essais de 1000 sélections pour comparer la rapidité acquise par une pré-sélection .....42
Tableau II	Tableau des statistiques recueillies lors de l'optimisation du deuxième rayon .....71
Tableau III	Tableau des statistiques recueillies lors de l'optimisation du troisième rayon.....72
Tableau IV	Tableau des statistiques recueillies lors de l'optimisation du quatrième rayon.....73
Tableau V	Tableau des statistiques recueillies lors de l'optimisation du cinquième rayon .....74
Tableau VI	Tableau de comparaison des modèles de raffinement de maillage .....90
Tableau VII	Tableau résumé de la comparaison des modèles sur l'effet de l'« Aspect Ratio » pour un élément interne .....92
Tableau VIII	Tableau résumé de la comparaison des modèles sur l'effet de l'« Aspect Ratio » pour un élément frontalier.....94

## LISTE DES FIGURES

	Page
Figure 1.1	Illustration du triangle de Pascal .....3
Figure 1.2	Exemples d'éléments triangulaires .....6
Figure 1.3	Exemples d'éléments à quatre côtés .....7
Figure 1.4	Exemples de maillages structurés .....8
Figure 1.5	Exemples de maillages non-structurés .....9
Figure 1.6	Exemples de maillages hybrides .....10
Figure 2.1	Krigeage d'une surface 3D.....13
Figure 2.2	Exemple d'acquisition de données de façon structurée .....17
Figure 2.3	Interface pour la saisie d'un fichier de coordonnées.....19
Figure 2.4	Visualisation de la surface krigée avec les paramètres par défaut .....19
Figure 2.5	Interface pour la sélection des paramètres adéquats pour une bonne modélisation de la surface par krigeage .....21
Figure 2.6	Interface des options pour la modification du maillage .....22
Figure 2.7	Résultat du maillage dans le logiciel Ansys® .....23
Figure 2.8	Maillage structuré de briques par krigeage d'une surface complexe .....24
Figure 3.1	Identification de la normale au point $P$ d'une surface krigée .....25
Figure 3.2	Illustration du calcul de l'épaisseur maximale.....26
Figure 3.3	Interface pour les paramètres concernant l'épaisseur .....27
Figure 3.4	Illustration d'une pièce 3D générée par l'extrusion d'une surface dans les directions normales.....28
Figure 3.5	Exemple d'une pièce sphérique avant la correction de la normale .....30
Figure 3.6	Allure du maillage redistribué après réorientation des normales sur le côté usiné.....30
Figure 3.7	Orientation des normales dans des plans différents après génération automatique de l'épaisseur .....31
Figure 3.8	Direction de la normale sur la face de symétrie ciblée par l'analyste....32

Figure 3.9	Maillage 3D d'un outil de coupe généré à l'aide de l'extrusion d'une surface krigée .....	34
Figure 3.10	Correction de l'orientation des normales sur le bord d'attaque d'un outil de coupe par un angle $\alpha$ .....	34
Figure 4.1	Représentation de la zone critique et du nombre d'éléments dans (a) un maillage grossier, (b) un maillage entièrement raffiné et les maillages raffinés localement : (c) librement par Ansys®, (d) par Ansys® avec les connectivités minimisant la largeur de bande et utilisé par Kwak [22-24] et (e) le patron elliptique.....	35
Figure 4.2	Graphique du temps de calcul en fonction du nombre d'éléments dans le maillage.....	36
Figure 4.3	Illustration d'un élément quadrangulaire et de ses deux diagonales.....	39
Figure 4.4	Visualisation de tous les éléments et de la croix de localisation permettant la sélection d'un élément.....	40
Figure 4.5	Vérification des nœuds dans le cercle ayant un rayon équivalent à la plus grande diagonale.....	41
Figure 4.6	Vérification des éléments dans le cercle ayant un rayon équivalent à la plus grande diagonale .....	44
Figure 4.7	Illustration d'un élément isoparamétrique à quatre nœuds pour la construction de la fonction d'interpolation .....	45
Figure 4.8	Illustration du triangle de Pascal .....	46
Figure 4.9	Affichage de l'élément sélectionné par l'analyste .....	48
Figure 4.10	Quelques modèles possibles de voisinage pour l'élément sélectionné ..	49
Figure 4.11	Affichage de l'élément sélectionné par l'analyste et des éléments de son entourage.....	50
Figure 4.12	Illustration des nœuds pour le modèle de raffinement elliptique sur les ellipses concentriques .....	51
Figure 4.13	Méthode graphique et proportionnelle d'un quadrant pour le schéma elliptique.....	53
Figure 4.14	Identification des « Bad Shape Elements » dans le schéma de raffinement elliptique obtenu par la méthode graphique .....	54
Figure 4.15	Illustration des « Bad Shape Elements » pour les modèles de « free mapping » de Ansys® et celui utilisé Kwak [22-24].....	55
Figure 4.16	Présentation des cas typiques de « Bad Shape » pour les éléments quadrilatéraux.....	56

Figure 4.17	Illustration d'une poutre encastree soumise à une charge uniformément répartie.....	57
Figure 4.18	Modélisation du problème par éléments finis avec un « Aspect Ratio » de 3 .....	58
Figure 4.19	Modélisation du problème par éléments finis avec un « Aspect Ratio » de 6 .....	58
Figure 4.20	Présentation des angles maximums pour un « Aspect Ratio » de 3 .....	59
Figure 4.21	Erreur relative de la contrainte en flexion calculée par Ansys® par rapport à la théorie sous l'influence de l'AR .....	62
Figure 4.22	Erreur relative de la contrainte en flexion calculée par Ansys® par rapport à la théorie sous l'influence de l'angle obtus .....	63
Figure 4.23	Erreur relative de la contrainte en flexion calculée par Ansys® par rapport à la théorie sous l'influence du parallélisme de deux cotés opposés.....	64
Figure 4.24	Erreur relative de la contrainte en flexion calculée par Ansys® par rapport à la théorie sous l'influence d'une combinaison de l'angle obtus et du parallélisme.....	65
Figure 4.25	Illustration des modifications pour répondre aux exigences de maillage de Ansys® .....	67
Figure 4.26	Différentes définitions de l' « Aspect Ratio ».....	68
Figure 4.27	Illustration d'un élément à quatre nœuds pour le calcul de l'AR .....	69
Figure 4.28	Illustration du schéma elliptique optimisé dans un système de coordonnées unitaire .....	75
Figure 4.29	Modification du modèle elliptique pour adaptation aux éléments sur les frontières .....	76
Figure 4.30	Visualisation du schéma elliptique appliqué sur les frontières .....	77
Figure 4.31	Arrangement des éléments adjacents ayant deux nœuds en commun avec l'élément cible.....	79
Figure 4.32	Diverses possibilités pour le calcul des nouveaux nœuds pour l'interpolation des nœuds de coins.....	80
Figure 4.33	Superposition des nœuds du modèle elliptique et des cinq éléments représentant la zone de raffinement.....	82
Figure 4.34	Illustration d'un élément à neuf nœuds pour la construction de la fonction d'interpolation.....	83

Figure 4.35	Schématisation de la zone d'optimisation et de la zone d'interpolation pour la transformation de la coordonnée à interpoler .....85
Figure 4.36	Illustration du raffinement de l'élément 8 du maillage grossier .....86
Figure 5.1	Maillage raffiné localement par l'algorithme de Ansys® avec un faible niveau de raffinement.....88
Figure 5.2	Maillage raffiné localement par l'algorithme de Ansys® avec un niveau de raffinement élevé .....88
Figure 5.3	Maillage raffiné par la méthode utilisé par Kwak [22-24] et par Ansys® dans certaines conditions.....89
Figure 5.4	Maillage raffiné à l'aide du schéma elliptique .....89
Figure 5.5	Illustration de l'élément interne à raffiner lors de la comparaison des modèles sur l'« Aspect Ratio » .....91
Figure 5.6	Illustration de l'élément de coin à raffiner lors de la comparaison des modèles sur l'« Aspect Ratio » .....93
Figure 5.7	Schéma du premier cas de validation, une plaque rectangulaire droite en flexion pure .....95
Figure 5.8	Illustration d'un maillage grossier avec deux éléments sur la hauteur ..96
Figure 5.9	Illustration du raffinement local elliptique pour un maillage grossier avec seulement un élément sur la hauteur .....97
Figure 5.10	Graphique des résultats pour une plaque droite en flexion pure .....97
Figure 5.11	Illustration du deuxième cas d'analyse, un tube à paroi mince en flexion pure .....98
Figure 5.12	Illustration d'un maillage grossier avec quatre éléments dans la demi-circonférence.....100
Figure 5.13	Modélisation du maillage raffiné localement avec quatre éléments dans la demi-circonférence .....100
Figure 5.14	Description imagée d'une plaque trouée au centre soumise à une force de traction pure .....101
Figure 5.15	Graphique pour le facteur de concentration de contrainte pour une plaque trouée en traction pure .....102
Figure 5.16	Modélisation d'une plaque trouée en traction à l'aide d'un maillage grossier .....103
Figure 5.17	Modélisation de la plaque trouée raffinée localement à l'aide du schéma elliptique.....104

Figure 5.18	Schématisation d'une plaque encochée en traction pure.....	105
Figure 5.19	Graphique pour le facteur de concentration de contrainte pour une plaque encochée en traction pure .....	106
Figure 5.20	Modélisation d'un quart de plaque encochée soumise à une force de traction maillée de façon grossière .....	106
Figure 5.21	Graphique pour le facteur de concentration de contrainte pour une plaque encochée en traction pure .....	107
Figure 5.22	Modèle de maillage grossier et résultats pour une plaque encochée en flexion pure.....	108
Figure 5.23	Description imagée d'une plaque avec un changement de section en traction pure.....	109
Figure 5.24	Graphique pour le facteur de concentration de contrainte pour une plaque avec un changement de section en traction pure .....	110
Figure 5.25	Modèle de la plaque avec un changement de section maillée grossièrement avec un raffinement local.....	111
Figure 5.26	Graphique pour le facteur de concentration de contrainte pour une plaque avec un changement de section en flexion pure .....	112
Figure 5.27	Résultats de la plaque avec un changement de section en flexion pure pour le maillage grossier .....	113
Figure 6.1	Illustration d'une pièce solide krigée .....	114
Figure 6.2	Découpage d'un solide en tranches à l'aide d'un module inséré dans ProE® .....	115
Figure 6.3	Illustration d'un élément de référence à huit nœuds et du résultat du maillage .....	116
Figure 6.4	Illustration d'un élément de référence à seize nœuds et du résultat du maillage .....	117
Figure 6.5	Maillage généré à l'aide des points aux intersections des splines de L'Hermite .....	118
Figure 6.6	Maillage généré par les intersections des courbes krigées.....	118
Figure 6.7	Maillage d'une pièce solide par krigeage des tranches obtenues dans ProE .....	119
Figure 6.8	Schéma de raffinement elliptique en deux dimensions.....	120
Figure 6.9	Illustration du schéma de raffinement elliptique en trois dimensions permettant l'observation jusqu'au cœur.....	121

Figure 6.10	Application du schéma de raffinement elliptique en trois dimensions à un élément interne .....	122
Figure 6.11	Application du schéma de raffinement elliptique en trois dimensions à un élément sur une surface .....	123
Figure 6.12	Application du schéma de raffinement elliptique en trois dimensions à un élément sur une arête.....	123
Figure 6.13	Application du schéma de raffinement elliptique en trois dimensions à un élément sur un coin .....	124

## LISTE DES ABRÉVIATIONS ET DES SIGLES

### Alphabet grec

$\alpha$	Angle de dépouille d'un outil de coupe
$\beta$	Angle de la direction normale calculé automatiquement
$\phi$	Angle paramétré d'une ellipse
$\theta$	Angle cartésien par rapport à l'axe des X
$\sigma$	Contrainte normale
$\sigma_A$	Contrainte normale au point A

### Alphabet latin

a	Rayon selon l'axe de X d'une ellipse
A	Surface d'un élément ou Surface d'une section de plaque
angle	Angle de révolution en radian pour les dérive et covariance sinusoïdales
AR	« Aspect Ratio »
b	Rayon selon l'axe de Y d'une ellipse
b	Épaisseur de la poutre
CA	Puissance de la covariance du profil « A »
CB	Puissance de la covariance du profil « B »
d	Diamètre d'un trou
$d_1$	Distance entre les nœuds 1 et 3 d'un élément
$d_2$	Distance entre les nœuds 2 et 4 d'un élément
DA	Degré de la polynomiale représentant la dérive des profils « A » + 1
DB	Degré de la polynomiale représentant la dérive des profils « B » + 1
F	Force générant un moment ou Force pour une plaque en traction pure
$F(r, s)$	Fonction pour l'itération en X
$G(r, s)$	Fonction pour l'itération en Y
h	Hauteur de la poutre
I	Moment quadratique de surface (Moment d'inertie)



IP	Nombre de points à kriger le long des profils « A » et nombre de profils « B »
JP	Nombre de points à kriger le long des profils « B » et nombre de profils « A »
[KA]	Matrice de krigeage pour les profils « A »
[KB]	Matrice de krigeage pour les profils « B »
L	Longueur de la poutre
M	Moment de flexion
$n_p$	Vecteur de la normale unitaire au point P
N	Fonction d'interpolation d'un élément isoparamétrique
P(s, t)	Coordonnées d'un point paramétré en s et t
Q	Coordonnées d'un point paramétré en u suivant une normale n passant par le point P
q	Charge uniformément répartie
r	Coordonnée dans le domaine de l'élément de référence
r	Rayon d'un trou, d'un encoche ou pour le changement de section
s	Coordonnée dans le domaine de l'élément de référence
s	Position paramétrique pour le krigeage le long des profils « A »
t	Position paramétrique pour le krigeage le long des profils « B »
u	Position paramétrique pour un point Q
$\vec{V}_{34}$	Vecteur du nœud 3 vers le nœud 4 d'un élément à quatre nœuds
Vref	Vecteur contenant la position paramétrique des points inspectés
x	Distance d'un point par rapport à l'encastrement
[X]	Matrice des coefficients des coordonnées en X des points à kriger
X(s, t)	Coordonnée selon l'axe des X pour un point paramétré en s et t
$x_i$	Coordonnée selon l'axe des X pour le point i
$X_i$	Coordonnées selon l'axe des X pour les nœuds de l'élément i
$X_{\text{usager}}$	Coordonnée selon l'axe des X du point sélectionné par l'utilisateur
y	Distance entre la fibre neutre et le point calculé
[Y]	Matrice des coefficients des coordonnées en Y des points à kriger
Y(s, t)	Coordonnée selon l'axe des Y pour un point paramétré en s et t

$y_i$       Coordonnée selon l'axe des Y pour le point i  
 $Y_i$       Coordonnées selon l'axe des Y pour les nœuds de l'élément i  
 $Y_{\text{usager}}$  Coordonnée selon l'axe des Y du point sélectionné par l'utilisateur  
 $[Z]$       Matrice des coefficients des coordonnées en Z des points à kriger  
 $Z(s, t)$  Coordonnée selon l'axe des Z pour un point paramétré en s et t

## INTRODUCTION

Les modèles mathématiques sont employés partout pour simuler des phénomènes physiques courants. De plus, le prototypage virtuel est un avenir prometteur puisqu'il est moins coûteux et moins long à fabriquer qu'un prototype réel. Il est donc très intéressant de modéliser à l'aide d'outils informatiques, des pièces mécaniques à géométries complexes telles une portière d'automobile ou une capsule de bouteille. Plus la géométrie à modéliser est complexe, plus la représentation par des fonctions analytiques devient lourde. La méthode d'analyse par éléments finis est apparue au milieu du vingtième siècle. La méthode consiste à décomposer une géométrie en sous-domaines appelés éléments et à appliquer une fonction représentant le comportement du problème aux nœuds de chaque élément. L'équation d'équilibre globale, formée à partir du principe variationnel, est finalement résolue à l'aide des conditions limites, soit de façon analytique ou à l'aide d'une méthode numérique.

La discrétisation par éléments finis est la méthode la plus couramment utilisée dans l'industrie car de nombreuses études portant sur l'analyse par éléments finis ont déjà été effectuées. Elle a pour avantages d'être rapide et flexible comparativement à la conception d'un prototype physique, en plus d'être moins coûteuse. La discrétisation par éléments finis est aussi très convoitée pour des analyses dans des milieux hostiles et inaccessibles, comme à l'intérieur du corps humain. Cependant, les problèmes majeurs rencontrés lors d'une analyse par éléments finis sont : la qualité du maillage et le nombre très élevé de nœuds et d'éléments, donc une augmentation de la taille du problème à résoudre. Ceci est d'autant plus vrai lorsqu'il est question des temps de calculs informatiques et de l'espace disque nécessaire aux solutions itératives des problèmes non-linéaire. Plusieurs types de modélisation existent, les discrétisations à l'aide de maillages structurés ou non, l'utilisation des éléments triangulaires ou quadrangulaires pour les surfaces, et les maillages hybrides permettant un mélange de tous ces types. Le but du présent projet est de programmer un algorithme permettant la génération

automatique des éléments en respectant une bonne qualité de maillage et en diminuant les temps de calculs informatiques et l'espace disque nécessaire. En résumé, le but ultime est de réduire le nombre d'éléments en gardant une bonne précision dans les résultats.

Pour mener à terme ce projet, la première étape consiste à faire une revue de la littérature et à prendre position concernant le type de maillage à choisir. Une fois que la position à l'égard du type de maillage est prise, il y a une explication de la méthode du krigeage pour le maillage des surfaces en trois dimensions (3D). Pour mieux visualiser l'effet des paramètres de krigeage, une interface interactive est créée. La troisième étape est d'expliquer la génération de volumes à partir de surfaces par extrusion dans les directions normales et de présenter une méthode de contrôle des normales sur les côtés, c'est-à-dire les frontières des pièces. Pour revenir aux surfaces et tenter d'améliorer la précision des résultats en gardant un nombre d'éléments relativement faible, le développement complet d'un nouveau modèle de raffinement est présenté. La validation du modèle de raffinement et l'efficacité du mailleur sont confirmées en comparant le générateur de maillage développé à l'intérieur de ce projet avec d'autres techniques de maillage et à l'aide d'exemples concrets. Pour clore le projet, une présentation des perspectives et des recommandations est faite.

## CHAPITRE 1

### REVUE DE LA LITTÉRATURE

La méthode des éléments finis a été appliquée en premier dans le domaine du calcul des structures dans les années soixante. L'arrivée de l'informatique a permis d'exploiter rapidement la puissance de cette méthode et de l'appliquer par la suite dans pratiquement tous les domaines du génie et de la physique [1]. Le principe de base de la méthode des éléments finis est la discrétisation d'un domaine en plusieurs sous-domaines appelés éléments finis, sur chacun desquels une fonction représente un comportement. La fonction est approximée sur chaque élément en un certain nombre de points appelés nœuds. Les équations d'équilibre des éléments finis sont formées à partir du principe variationnel. Des fonctions d'interpolation, ou fonctions de forme, approximent le champ de variation sur chaque élément, et les équations locales sont ensuite assemblées pour former les équations globales. Les fonctions d'interpolation sont développées à l'aide de termes sélectionnés rigoureusement à l'intérieur du triangle de Pascal [2, 3] présenté à la figure 1.1.

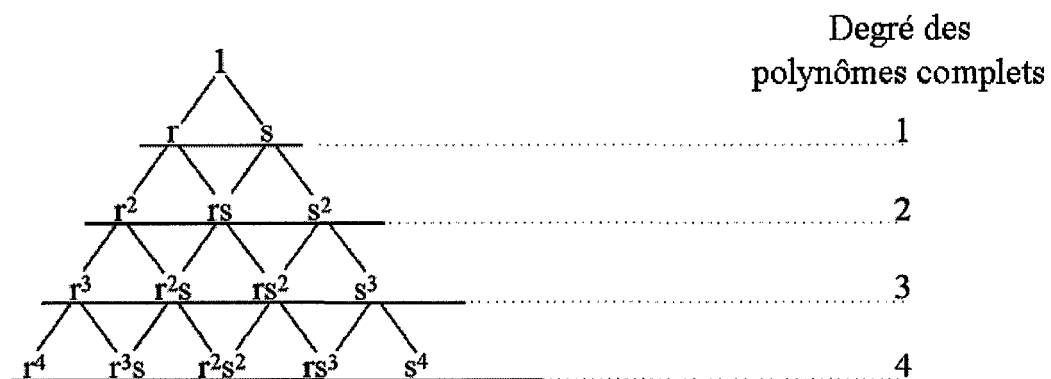


Figure 1.1 Illustration du triangle de Pascal<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Tiré et adapté de Bathe [2] et du Schaum [3].

Les équations globales sont ensuite résolues avec les conditions limites appropriées [2, 4, 5]. Les principaux avantages de la méthode des éléments finis sont [6, 7] : (a) la possibilité d'obtenir des solutions détaillées des mécanismes de déformations des corps, c'est-à-dire, les vitesses, les formes, les déformations, les contraintes, les distributions de pression de contact et (b) une fois que la méthode d'analyse est programmée, elle peut être utilisée pour une grande variété de problèmes seulement en changeant les données d'entrée.

Cependant, une décision majeure doit être prise au départ : « Comment modéliser la pièce et quel genre de sous-domaines utilisés pour discrétiser une géométrie complexe? » Les prochaines sections décrivent les caractéristiques utilisées pour le développement du mailleur de ce projet, telles la méthode à utiliser pour la représentation des surfaces, la forme des éléments, maillage structuré ou non, grossier ou raffiné.

## 1.1 Représentation graphique

La réingénierie, « reverse engineering » en anglais, est une technique qui consiste à construire le modèle virtuel d'une composante mécanique existante [8]. Les courbes et les surfaces « B-Spline » [9] et NURBS [10] sont des méthodes utilisées pour la représentation géométrique des pièces. Puisque les surfaces générées par ces méthodes sont décrites de façon discrète par des points de contrôle, il peut arriver qu'il n'y ait pas coïncidence parfaite aux zones de rencontre d'arêtes par exemple, créant ainsi des trous et des discontinuités. Ceci est un inconvénient car il n'existera pas de méthodes automatiques pour les réparations des surfaces. De plus, la nature non-linéaire des NURBS signifie que toutes les opérations sur de telles surfaces sont aussi non-linéaires, si bien qu'un simple calcul d'intersection peut coûter très chère puisqu'il conduit à la recherche de la solution d'un problème de minimisation non-linéaire avec au moins deux valeurs de tolérance qui n'ont aucune signification physique.

Une méthode comme le krigeage, dont la théorie est expliquée au prochain chapitre, a pour avantage de faire passer automatiquement la surface créée par les points réels, inspectés sur la pièce à modéliser. En plus, l'équation de la surface krigée est continue et dérivable dans toutes les directions, ce qui permet d'extruder les surfaces pour des représentations volumiques. Finalement, le krigeage offre une discrétisation paramétrique des surfaces krigées à l'aide d'éléments quadrangulaires à quatre nœuds.

## 1.2 Choix du type d'éléments

Deux formes géométriques sont principalement utilisées pour la discrétisation d'un domaine en deux dimensions (2D) en éléments, ce sont les triangles et les quadrangles. Chaque forme a ses avantages et ses inconvénients.

Pour commencer, les triangles s'adaptent très facilement aux géométries complexes [11, 12] spécialement sur les frontières curvilignes. En plus, la génération de maillage avec des éléments triangulaires bénéficie de méthodes éprouvées telle la triangulation de Delaunay [13, 14]. Pour des éléments à trois nœuds, puisque les fonctions d'interpolation sont linéaires [2], il est possible d'obtenir des solutions analytiques, ce qui est plus rapide lors de la résolution. En revanche, la précision obtenue avec des éléments triangulaires à trois nœuds est faible.

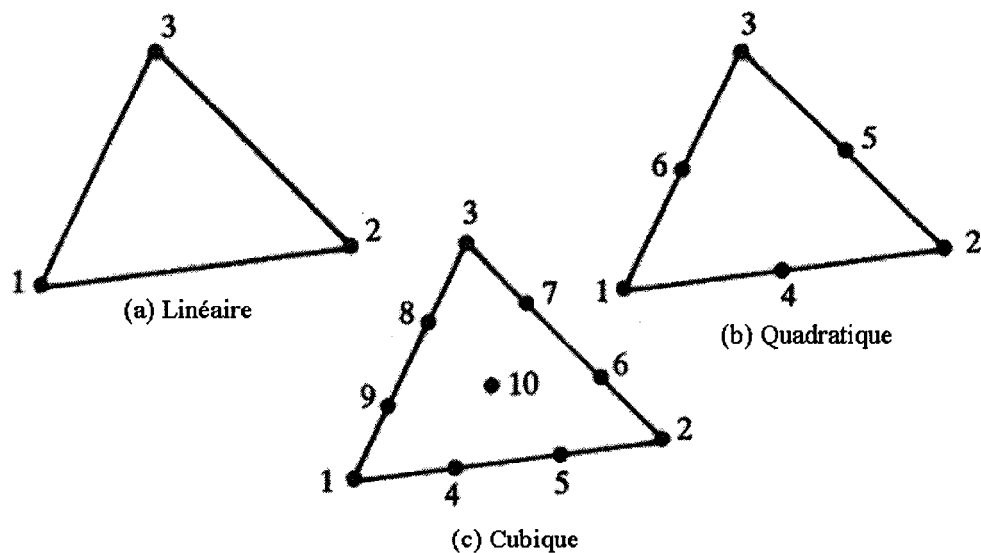


Figure 1.2 Exemples d'éléments triangulaires



Il est vrai qu'en augmentant le nombre de nœuds sur les arêtes et au centre, les résultats sont plus précis. Par contre, il n'est plus possible d'obtenir des équations explicites pour les matrices élémentaires. Par conséquent, il faut intégrer numériquement les équations d'équilibre. La figure 1.2 montre quelques exemples d'éléments triangulaires. Il est à noter que toutes les bases sont complètes pour les triangles. De plus, les éléments triangulaires ont tendance à bloquer lors d'analyse structurale en flexion.

D'un autre côté, les éléments quadrangulaires sont plus élaborés. Le degré de la base polynomiale est plus élevé, mais la base demeure incomplète. En général, les éléments à quatre côtés offrent des résultats de meilleure qualité et convergent plus rapidement que les éléments triangles [11]. La figure 1.3 illustre des éléments quadrilatéraux.

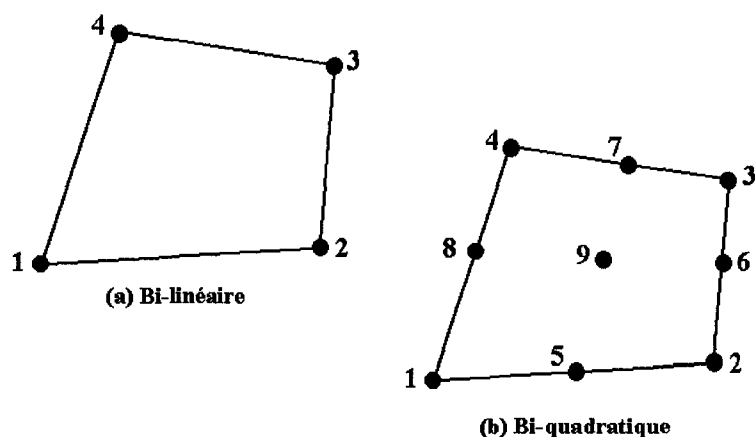


Figure 1.3 Exemples d'éléments à quatre côtés

Lo et Lee [15] ont comparé quelques cas typiques avec des maillages de triangles, de quadrangles et mixtes et ils ont conclu que pour des maillages équivalents, les maillages d'éléments quadrangulaires utilisent deux fois moins d'éléments. De plus, selon Champliand [16, 17], par analogie aux surfaces en 2D, le maillage d'un volume complexe à l'aide de briques (quadrilatères) réduit par un facteur de 2 le nombre de nœuds et jusqu'à 6 pour le nombre d'éléments comparé à un maillage de tétraèdres (pyramides à base triangulaire). Les quadrangles sont donc préférables.

### 1.3 Choix du type de maillages

Il existe trois grandes classifications des maillages : les maillages structurés, les maillages non-structurés et les maillages hybrides.

#### 1.3.1 Maillage structuré

Un maillage structuré se caractérise par un patron qui se répète, un nombre identique d'éléments autour de chaque nœud interne et une numérotation ordonnée des éléments [14]. Les maillages structurés ont moins de risque de contenir des éléments distordus. Alors, il y a une meilleure continuité des résultats à travers le maillage. Certains exemples de maillages structurés sont illustrés à la figure 1.4. Le logiciel TrueGrid [18] s'est penché particulièrement sur le maillage structuré de surface aux arêtes courbes tel le cercle.

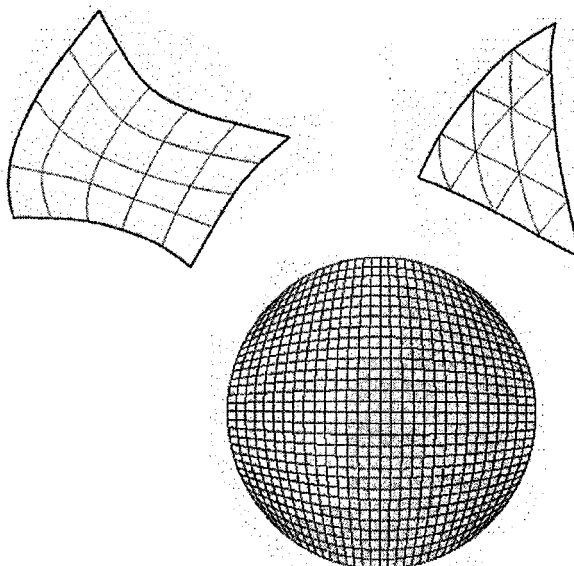


Figure 1.4 Exemples de maillages structurés<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Tiré et adapté de TrueGrid [15].

### 1.3.2 Maillage non-structuré

Les caractéristiques des maillages non-structurés sont l'absence de patron, un nombre d'éléments autour des nœuds qui varie et une numérotation aléatoire des éléments. Ce qui amène comme désavantage une connectivité explicite nécessitant plus de mémoire et d'espace disque, plus lent en temps de calcul, pas d'ordre entre la numérotation donc, plus difficile à déboguer [19]. En revanche, ce type de maillage s'automatise facilement et il est très robuste [14]. La figure 1.5 montre des exemples de maillages non-structurés dont un maillage obtenu à partir d'une triangulation de Delaunay [13, 14].

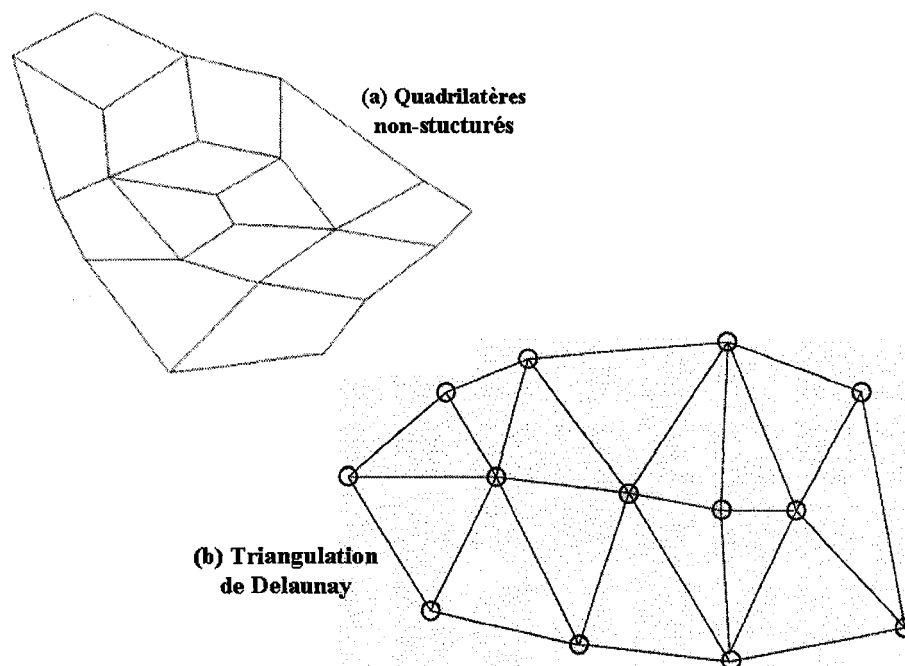


Figure 1.5 Exemples de maillages non-structurés

### 1.3.3 Maillage hybride

Les maillages hybrides comprennent plusieurs types d'éléments, par exemple, une combinaison d'éléments triangulaires et quadrangulaires (voir figure 1.6a). Ce type de maillage est surtout utilisé pour discrétiser des problèmes complexes de la mécanique des fluides. Les éléments à quatre nœuds couvrent les régions près des surfaces de contact et les triangles discrétisent le reste du domaine d'analyse [20]. Ce dernier point confirme encore une fois le choix des éléments quadrangulaires pour une précision accrue, comme sur le voisinage d'un solide en mécanique des fluides. Les maillages hybrides comprennent aussi certaines régions structurées et d'autres non [21-26]. Il arrive que les maillages deviennent non-structurés pour mieux représenter les frontières (voir figure 1.6c) ou encore pour augmenter la précision en diminuant la taille des éléments en raffinant localement (voir les figures 1.6b et 1.6d).

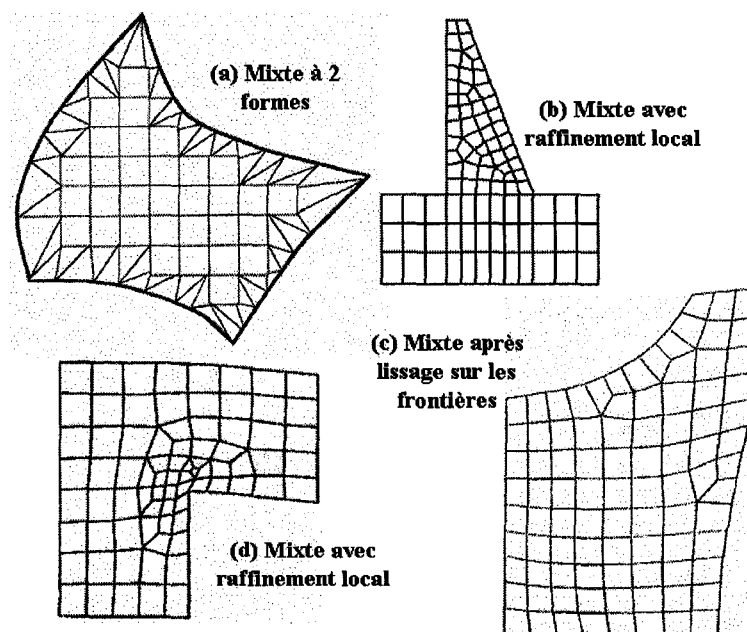


Figure 1.6 Exemples de maillages hybrides<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Tiré et adapté (b) de Lackner [18], (c) de Zhu [22-23] et (d) de Kwak [19-21].

Pour augmenter la précision dans les résultats, il est certain qu'un maillage raffiné entièrement le permet. Cependant, ce type de raffinement va à l'encontre du but premier qui est d'obtenir une bonne précision avec un nombre réduit d'éléments dans le maillage. Donc une technique idéale est de conserver les avantages d'un maillage grossier et structuré en appliquant un patron de raffinement local semi-structuré. Un maillage grossier est peu précis, cependant il est très utile où les résultats sont peu importants ou non-critiques. Ce qui est tout le contraire avec la technique d'avance frontale car les gros éléments se trouvent sur les frontières où les résultats sont généralement les plus pertinents. Il faut aussi s'assurer d'avoir une zone de transition afin d'améliorer la continuité des résultats entre les petits et les gros les éléments du maillage.

#### **1.4 Objectifs et contributions prévues**

Les objectifs à respecter pendant le projet sont :

- Une représentation fidèle des surfaces
- Une minimisation des temps de calculs
- Une réduction de l'utilisation de l'espace disque
- Une possibilité favorable au raffinement local

Donc, le mailleur est développé sur les bases d'un maillage grossier structuré à l'aide du krigeage. Une interface graphique est créée afin d'accroître l'interaction avec l'utilisateur et pour favoriser le développement paramétrique du mailleur. Le développement d'un nouveau patron de raffinement contribue à augmenter la précision des résultats. Le nouveau schéma de raffinement doit présenter une bonne zone de transition entre les petits éléments et les éléments du maillage grossier, afin de conserver une bonne continuité des résultats entre les éléments.

## **CHAPITRE 2**

### **MAILLAGE DE SURFACES 3D PAR KRIGEAGE**

Comme le choix de maillage s'est arrêté sur un maillage structuré d'éléments quadrangulaires, le krigeage dual est utilisé pour la discrétisation des pièces. Ce chapitre comporte les explications et la définition du krigeage, les étapes du développement de l'algorithme telles la prise de données, la sélection des options pour le krigeage et la transformation des coordonnées et des connectivités pour le transfert à un logiciel commercial. À la fin du chapitre, des exemples d'application sont présentés.

#### **2.1 Définition du krigeage dual pour les surfaces 3D**

Le krigeage est apparu au début des années cinquante lorsque Krige [27] appliquait cette théorie à l'évaluation de la quantité de minerai pouvant être extraite d'une mine. Mais le nom du krigeage est attribuable à Matheron [28] qui est le premier à avoir fait une analyse mathématique rigoureuse du travail de Krige. Le krigeage est une méthode générale d'interpolation dans des espaces de dimensions quelconques. Cette méthode permet de faire passer la surface modélisée par les points mesurés sur les pièces, ce qui est un avantage primordial par rapport aux méthodes des moindres carrés. Les fonctions interpolées sont continues et dérivables, ce qui a son importance, car l'équation de la normale est construite à l'aide des dérivées, et la solution itérative de cette équation par la méthode de Newton-Raphson nécessite les dérivées secondes [1].

Il est possible de reproduire fidèlement le relief de pièces sous forme de trois équations paramétriques en donnant un nombre de points suffisant. Chacune des équations représente une coordonnée d'un point P, dans un repère cartésien c'est-à-dire :  $X(s, t)$ ,  $Y(s, t)$  et  $Z(s, t)$ , où  $s$  et  $t$  sont les positions paramétriques des points relevés le long des

profils « A » et « B » respectivement (voir la figure 2.1.) La paramétrisation peut être discrète ou fonction de la distance euclidienne entre les points successifs d'un profil [1].

Le but du krigage des surfaces est de faire passer une « peau » par un nuage de points. Les points de la surface sont tout d'abord enregistrés de façon structurée sous la forme de profils, comme à la figure 2.1. Le nombre de points donnés est fonction à la qualité de la représentation surfacique désirée. La direction des profils est obligatoirement déterminée avant la saisie des coordonnées des points. Si le nombre de coordonnées est différent pour deux profils dans une même direction il est possible de kriger individuellement chaque profil pour y attribuer un nombre identique de points.

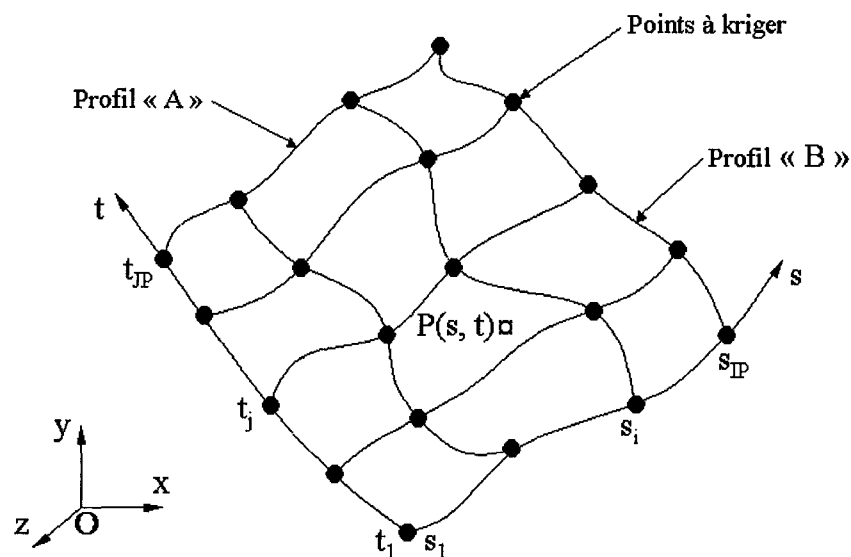


Figure 2.1 Krigage d'une surface 3D

L'équation paramétrique de la surface krigée est formée à l'aide des équations de krigeage de chacun des profils. Toutes ces équations ont la forme suivante :

$$x(X_i) = a(X_i) + b(X_i) \quad (2.1)$$

où,  $a(X_i)$  représente le comportement moyen de la surface, cette partie est appelée la dérive. Tandis que  $b(X_i)$  est une correction qui représente les fluctuations autour de la moyenne, appelée également covariance généralisée [29, 30]. La variable  $X_i$  est le vecteur des coordonnées des points inspectés selon l'axe des X. En changeant  $x$  pour  $y$  et  $z$ , les équations pour les deux autres directions sont construites. Le choix de la forme algébrique de la valeur moyenne appartient à l'utilisateur, elle est choisie de la même façon que dans la méthode des moindres carrés. Tandis que la correction est basée sur une modélisation de la variance de l'erreur d'estimation par une fonction de la différence en valeur absolue des positions paramétriques. La covariance est donc définie à l'aide d'une fonction de forme arbitraire qui permet d'ajuster le modèle afin qu'il passe par tous les points à kriger. Ces aspects seront approfondis dans une autre section.

Donc la fonction  $x(s)$  pour un  $j^{ième}$  profil « A » s'exprime comme ceci :

$$x(s) = \sum_{i=1}^M a_{si} p_i(s) + \sum_{j=1}^N b_{sj} K(|s - s_j|) \quad (2.2)$$

avec la variable  $a_{si}$  qui représente le coefficient de la dérive  $p_i(s)$ , tandis que  $b_{sj}$  est le coefficient de la covariance  $K(|s-s_j|)$  où  $|s-s_j|$  est la distance entre le paramètre  $s$  et la valeur paramétrique d'un nouveau point  $s_j$ . Le nombre de nouveaux points pour représenter le profil « A » une fois krigé, est désigné par la variable  $N$  et  $M$  varie en fonction du type de la dérive choisie pour représenter les courbes dans la direction du profil « A ». Pour obtenir un  $i^{ième}$  profil « B », on remplace  $s$  par  $t$ .



Pour une surface donnée, il y a  $JP$  points le long des profils « B » donc nécessairement  $JP$  profils « A » et  $IP$  points le long des profils « A » ce qui signifie  $IP$  profils « B ». Les dérivées sont des polynômes d'ordre  $(DA-1)$  et  $(DB-1)$  et les covariances généralisées à la puissance  $CA$  et  $CB$ , pour modéliser les profils « A » et « B » respectivement, alors par exemple, l'équation paramétrique sous forme matricielle de  $X(s, t)$  s'écrit [1] :

$$X(s, t) = \underbrace{\left[ \dots |s - s_p|^{CA} \dots \right]}_{\text{Covariance de « A »}} \underbrace{\left[ \dots s^q \dots \right]}_{\text{Dérivée de « A »}} * [KA]^{-1} * [X] * [KB]^{-1} * \underbrace{\left[ \begin{array}{c} \vdots \\ |t - t_m|^{CB} \\ \vdots \\ \dots \\ \vdots \\ t^n \\ \vdots \end{array} \right]}_{\substack{\text{Covariance de « B »} \\ \text{Dérivée de « B »}}} \quad (2.3)$$

avec  $[KA]$  : la matrice de krigeage pour les profils « A »,  $[KB]$  : la matrice de krigeage pour les profils « B » et  $[X]$  : la matrice des coefficients des coordonnées en X de tous les points à kriger. L'obtention de  $Y(s, t)$  et  $Z(s, t)$  se fait en changeant respectivement  $[X]$  par  $[Y]$  et par  $[Z]$  dans l'équation 2.1. Les limites pour les indices et les exposants dans cette dernière équation sont :

$m$  varie de 1 à  $JP$

$n$  varie de 0 à  $(DB-1)$

$p$  varie de 1 à  $IP$

$q$  varie de 0 à  $(DA-1)$

La matrice  $[KA]^{-1}$  est la matrice inverse de la matrice de krigeage pour les profils « A » :

$$[KA] = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vdots & 1 & \cdot & (s_1)^q & \cdot & (s_1)^{DA-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & |s_u - s_v|^{CA} & \cdot & \cdot & \vdots & 1 & \cdot & (s_u)^q & \cdot & (s_u)^{DA-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vdots & 1 & \cdot & (s_{IP})^q & \cdot & (s_{IP})^{DA-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vdots & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 \\ (s_1)^q & \cdot & (s_v)^q & \cdot & (s_{IP})^q & \vdots & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vdots & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Où les indices  $u$  et  $v$  varient de 1 à  $IP$ . Les matrices  $[KA]$  et  $[KA]^{-1}$  sont des matrices symétriques de dimension  $(IP+DA)$ . La matrice  $[KB]$ , de dimension  $(JP+DB)$ , est obtenue de façon similaire en remplaçant  $s$  par  $t$ ,  $IP$  par  $JP$ ,  $CA$  par  $CB$  et  $DA$  par  $DB$  dans l'équation 2.2.

La matrice des coefficients,  $[X]$  est formée des coordonnées des points à kriger. Il suffit de changer les  $X_{ij}$  pour de  $Y_{ij}$  ou des  $Z_{ij}$  dans l'équation 2.3 pour récupérer les matrices des coefficients  $[Y]$  et  $[Z]$ . Le nombre de lignes et de colonnes de zéros dépendent de l'ordre des dérivés du profil « A » et du profil « B ».

$$[X] = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdot & x_{1j} & \cdot & x_{1JP} & \vdots & \overbrace{0 \cdot 0 \cdot 0}^{DA \text{ colonnes}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vdots & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ x_{i1} & \cdot & x_{ij} & \cdot & x_{iJP} & \vdots & 0 \cdot 0 \cdot 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vdots & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ x_{IP1} & \cdot & x_{IPj} & \cdot & x_{IPJP} & \vdots & 0 \cdot 0 \cdot 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \dots \dots \dots \dots \\ 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & \vdots & 0 \cdot 0 \cdot 0 \\ 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & \vdots & 0 \cdot 0 \cdot 0 \\ 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & \vdots & 0 \cdot 0 \cdot 0 \end{bmatrix} \quad \left. \vphantom{\begin{bmatrix} x_{11} \\ \cdot \\ x_{i1} \\ \cdot \\ x_{IP1} \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \right\} DB \text{ lignes} \quad (2.5)$$

L'équation de la surface est donc obtenue sous forme paramétrique ( $X(s, t)$ ,  $Y(s, t)$  et  $Z(s, t)$ ), après avoir inversé les matrices de krigeage  $[KA]$  et  $[KB]$ .

## 2.2 Développement de l'algorithme et de l'interface

Puisqu'un mailleur est régulièrement utilisé par un analyste, une interface interactive est requise. Mais avant tout, comme il a été spécifié précédemment, la surface doit être transmise à l'algorithme de krigeage sous forme de profils de points réels et structurés. Par la suite, l'influence du choix de la dérive, de la covariance et du nombre de points est discutée. Une fois que la pièce est maillée à l'aide du krigeage, le modèle est transféré dans un logiciel d'analyse par éléments finis en l'occurrence Ansys®.

### 2.2.1 Inspection des coordonnées réelles

Il est important que tous les fichiers de coordonnées, de surfaces complexes, obtenus à la suite d'une inspection, soient sauvegardés de la même façon. L'inspection des pièces peut être manuelle ou automatique par détection laser ou de tout autre système d'acquisition de données, voir la figure 2.2 pour un exemple.

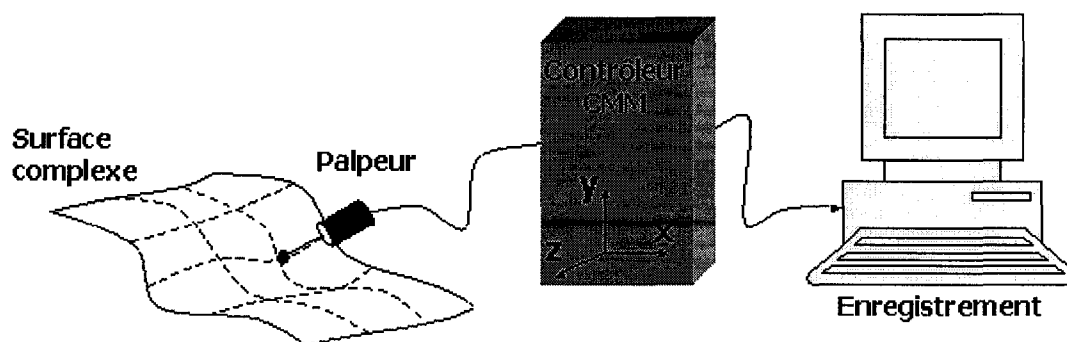


Figure 2.2 Exemple d'acquisition de données de façon structurée

Pour une bonne représentation de la pièce étudiée, la surface doit être complètement inspectée ligne par ligne, avec le même nombre de points sur chaque ligne. Plus le nombre de points inspectés est élevé, meilleure la reproduction de la pièce est. Le critère d'un nombre de points identique sur chaque ligne est obligatoire pour obtenir un maillage parfaitement structuré avec des éléments quadrangulaires ou avec des éléments briques. Cependant, s'il arrive que le nombre de points inspectés soit différent d'une rangée à l'autre, il est possible de redistribuer les points automatiquement à l'aide du krigeage individuel de chaque profil « A » ou profil « B », afin de créer un krigeage uniforme des profils.

Il est à noter que tous les fichiers de coordonnées de points représentant une surface ont des paramètres imposés. La dimension du problème doit être spécifiée au début du fichier de coordonnées : 1 pour une ligne, 2 pour une surface. Les autres paramètres dépendent du premier, ce sont le nombre de points par profil. Par exemple, si la dimension du problème est 1, seulement le nombre de points sur le profil « A » est nécessaire et si la dimension est 2, il faut ajouter le nombre de points le long du profil « B ». C'est à la suite de ces informations que les coordonnées des points sont emmagasinées, afin d'être krigées ultérieurement.

Une première interface est créée pour permettre la récupération des coordonnées, voir la figure 2.3. Les termes anglais sont utilisés pour une version universelle. L'interface permet tout d'abord de sélectionner le nom du fichier dans lequel sont enregistrées les coordonnées des points de la surface. Tous les noms de fichiers ont le préfixe « init\_ » pour les identifier. Pour tous les types de surfaces, lorsqu'un fichier de coordonnées est sélectionné, le nombre de points apparaît pour chaque ligne et chaque colonne. C'est à partir des coordonnées du fichier choisi qu'un premier aperçu de la surface krigée est affichée à l'utilisateur en appuyant sur le bouton « kriging ». La figure 2.4 présente la surface obtenue avec les paramètres par défaut du krigeage, c'est-à-dire avec quatre points intermédiaires dans les deux directions et des dérivées et covariances cubiques.

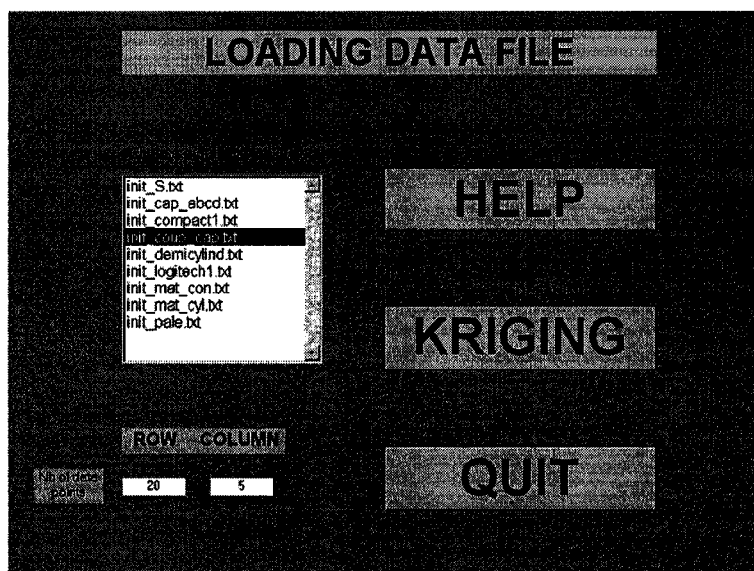


Figure 2.3 Interface pour la saisie d'un fichier de coordonnées

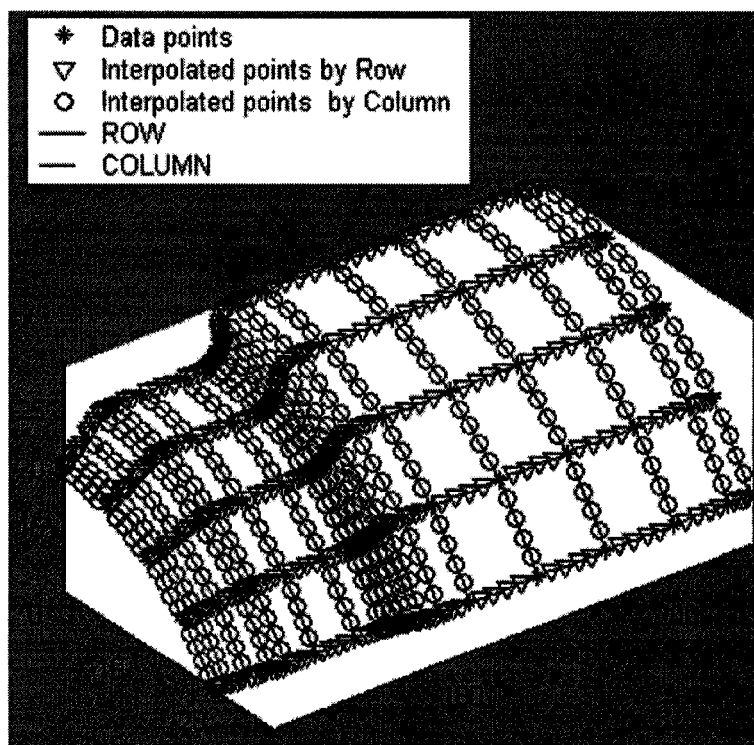


Figure 2.4 Visualisation de la surface krigée avec les paramètres par défaut

### 2.2.2 Sélection des options de krigeage

Le krigeage dépend de plusieurs paramètres. Comme il a été mentionné au début de ce chapitre, la paramétrisation est soit discrète ou fonction de la distance euclidienne entre les points inspectés. Pour l'algorithme présenté, le nombre de points total après le krigeage est fonction du nombre de points intermédiaires aux points initiaux. Il a aussi été question de l'existence de plusieurs types de dérive et de covariance. Voici la liste des types de dérive et de covariance utilisés [29, 30] :

Types de dérive :

- 1 – Constante : [1]
- 2 – Linéaire :  $[1, vref^1]$
- 3 – Quadratique :  $[1, vref^1, vref^2]$
- 4 – Cubique :  $[1, vref^1, vref^2, vref^3]$
- 5 – Sinusoïdale :  $[1, \sin(angle * vref), \cos(angle * vref)]$

Types de covariance :

- 1 – Linéaire :  $H^1$
- 2 – Cubique :  $H^3$
- 3 – Logarithmique :  $H^2 * \ln(H)$
- 4 – Exponentielle :  $\exp(-H^2)$
- 5 – Sinusoïdale :  $\sin(angle * H)$

Où  $vref$  représente la position des points connus par inspection, l'*angle* de révolution est en radian pour les dérives et les covariances sinusoïdales et  $H$  est une matrice où  $H_{ij} = \sqrt{(vref(i) - vref(j))^2}$ ,  $i$  étant l'indice pour les lignes et  $j$  pour les colonnes. Une prochaine étude permettrait un approfondissement des effets de chacun des types de dérive et de covariance.

La figure 2.5 illustre l'interface dans laquelle l'utilisateur peut choisir les paramètres de krigeage qu'il désire pour la modélisation d'une surface. Il peut décider du nombre de points intermédiaires dans toutes les directions, ligne et colonne. Il a aussi le choix du type de dérive et de covariance qu'il désire utiliser pour la définition de la surface sélectionnée. Ainsi que l'angle de révolution, en radian, pour un type de dérive ou de covariance sinusoïdale, dans l'exemple d'un quart de cylindre, l'angle de révolution serait de  $\pi/2$  radians soit  $90^\circ$ . Une autre option est offerte, celle de générer un solide par l'extrusion d'une surface. Cette dernière sera abordée dans le prochain chapitre.

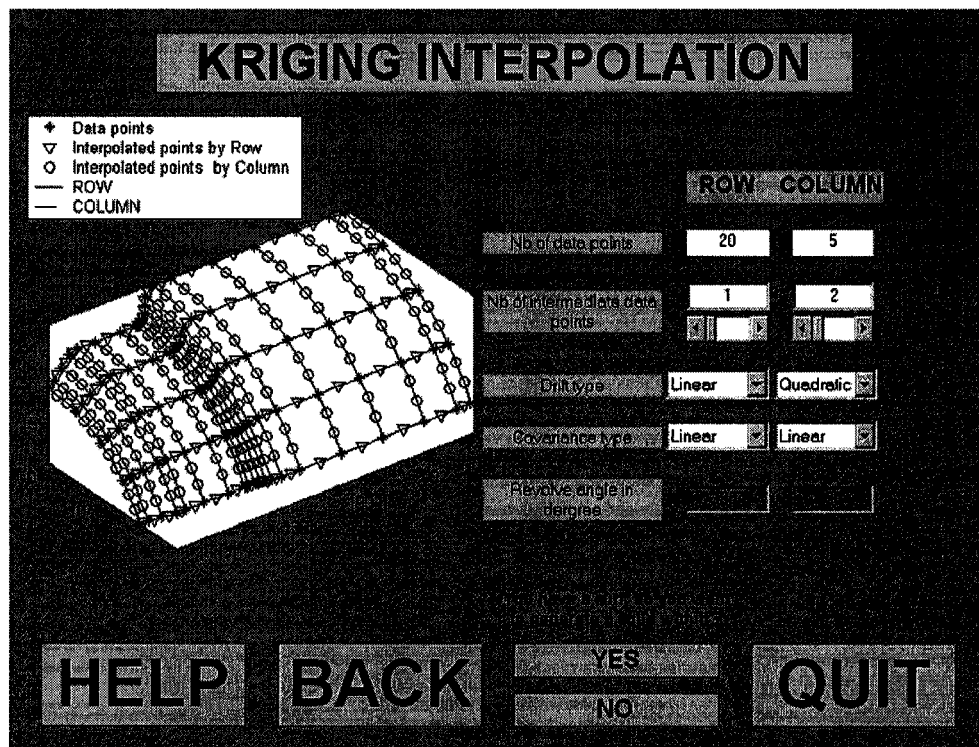


Figure 2.5 Interface pour la sélection des paramètres adéquats pour une bonne modélisation de la surface par krigeage

Une fois que la surface krigée répond aux exigences de l'analyste, la génération du maillage structuré avec des éléments quadrangulaires est faite. L'utilisateur peut toujours décider à cette étape de modifier le nombre d'éléments dans toutes les directions du problème comme le montre la figure 2.6. Par contre, les paramètres concernant les types de la dérive et de la covariance sont fixés, mais l'usager peut revenir en arrière à tout moment à l'aide du bouton « BACK ».

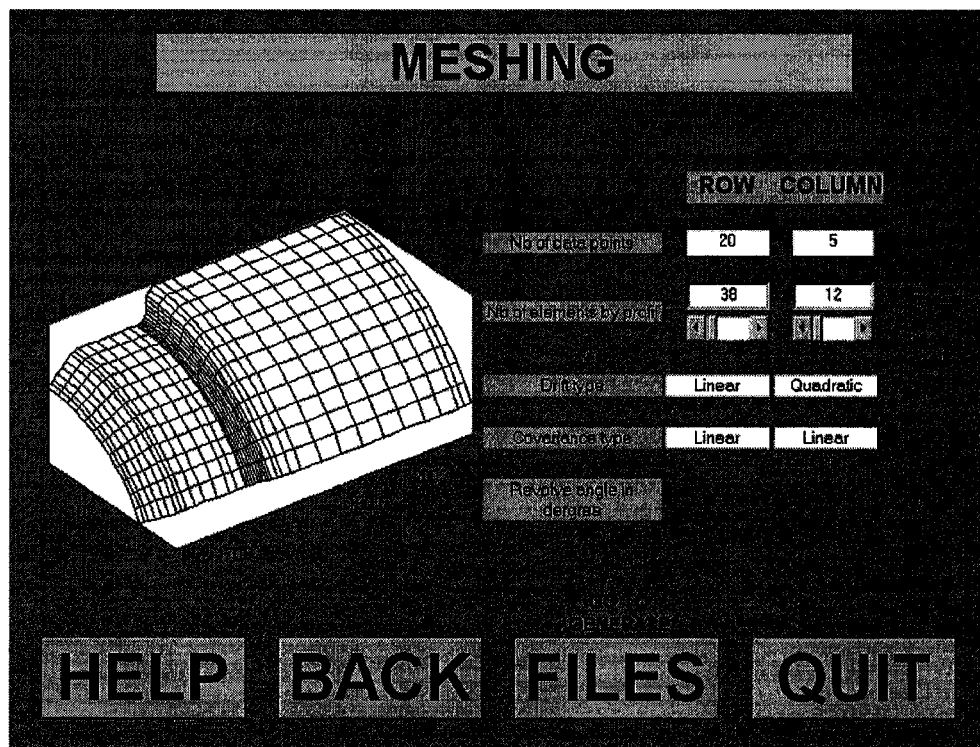


Figure 2.6 Interface des options pour la modification du maillage



### 2.2.3 Transfert du maillage vers un logiciel d'analyse par éléments finis

Lorsque la discrétisation est satisfaisante, l'analyste peut générer trois fichiers reconnus par le logiciel d'analyse par éléments finis, Ansys®. Ces fichiers sont l'enregistrement des coordonnées des nœuds, la liste des connectivités des éléments et un fichier de commandes pour la récupération du maillage dans le logiciel Ansys®. La spécification du type d'éléments, plan à quatre nœuds, coque, etc., est faite à ce moment. Par la suite, le fichier de commandes est lu par Ansys®. La figure 2.7 présente le résultat final d'un maillage avec des éléments coques d'une épaisseur de 1 mm. Il ne reste qu'à attribuer un matériau et ses propriétés mécaniques, les conditions aux frontières, les conditions de chargement, etc., pour une analyse complète. Actuellement, seulement le logiciel Ansys® peut recevoir un maillage généré par krigeage, mais il serait possible d'écrire les fichiers nécessaires pour des analyses avec d'autres codes comme Nastran®, Algor®, Catia®, ProEngineer®, etc.

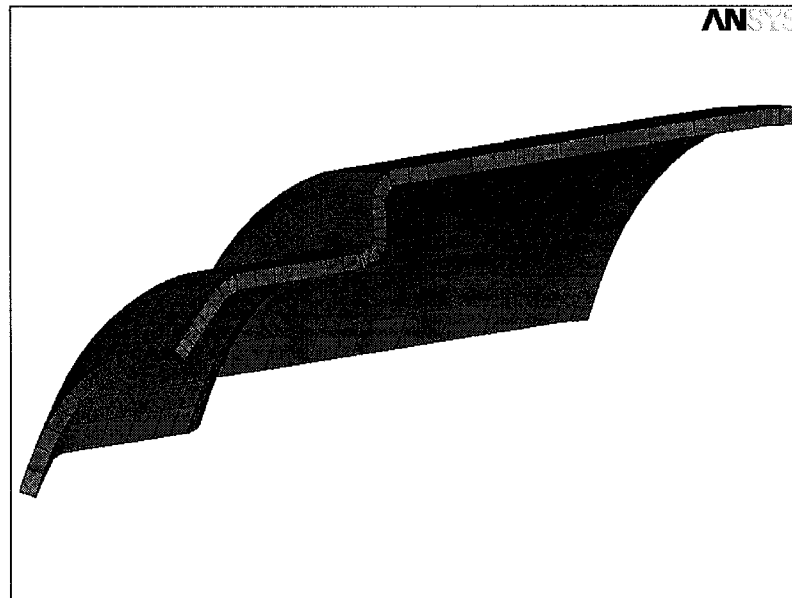


Figure 2.7 Résultat du maillage dans le logiciel Ansys®

### 2.3 Exemples de maillages de pièces minces

Un exemple d'une pièce complexe, maillée par krigeage est présenté à la figure 2.8. Le maillage est structuré avec des éléments hexaédriques obtenus par l'extrusion de la surface krigée. Les résultats montrent que la taille du modèle peut être réduite d'au moins par un facteur de 2 en ce qui a trait au nombre de nœuds et jusqu'à un facteur de 6 pour le nombre d'éléments comparé à un maillage de tétraèdres équivalents en taille. La même conclusion avait été obtenue par Champiaud et Lê [17].

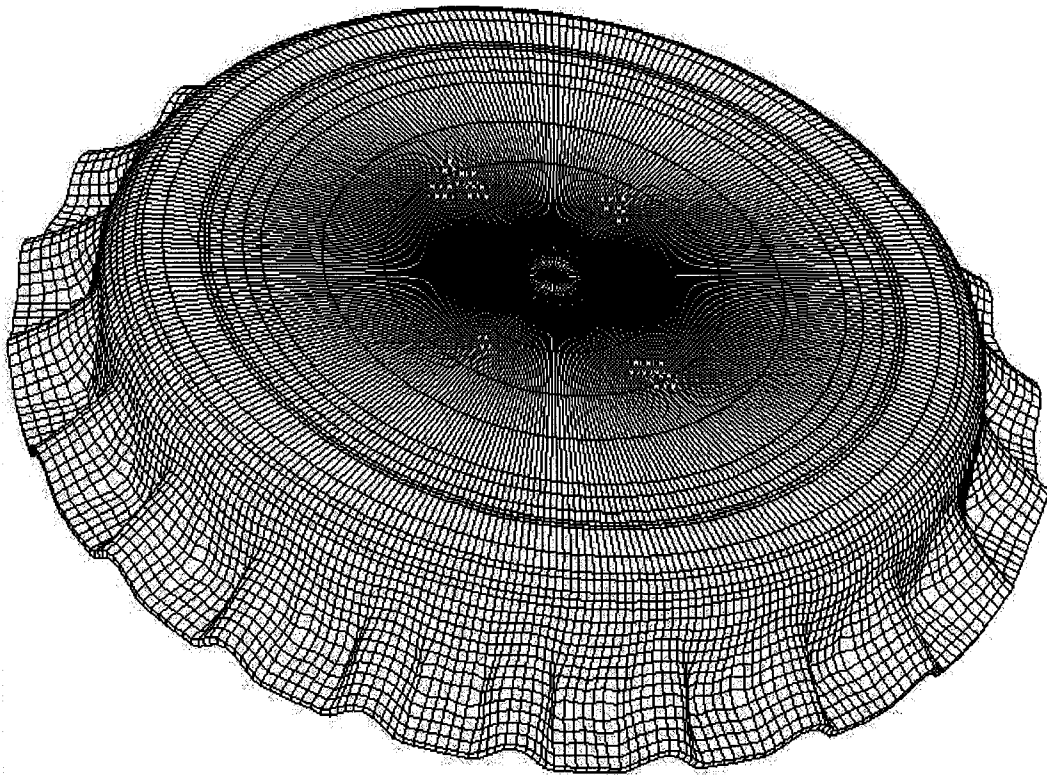


Figure 2.8 Maillage structuré de briques par krigeage d'une surface complexe

Ce chapitre a aussi permis de participer à la 29th International Conference on Computers and Industrial Engineering [31].

## CHAPITRE 3

### GÉNÉRATION DE VOLUMES PAR EXTRUSION

Une fois la surface du modèle est krigée, il est possible de générer un volume par extrusion. L'extrusion est appliquée à chaque point krigé suivant la direction normale à la surface, voir la normale du point  $P$  à la figure 3.1. L'épaisseur du volume est spécifiée par l'utilisateur, mais l'épaisseur maximale permise est calculée pour éviter toutes interférences dans la pièce générée. Il se peut aussi que les normales ne soient pas orientées dans la direction voulue par l'analyste puisque les équations représentant la surface ne sont que des interpolations. C'est pourquoi le contrôle des normales sur les frontières est offert. Des exemples concrets sont présentés pour illustrer la méthode.

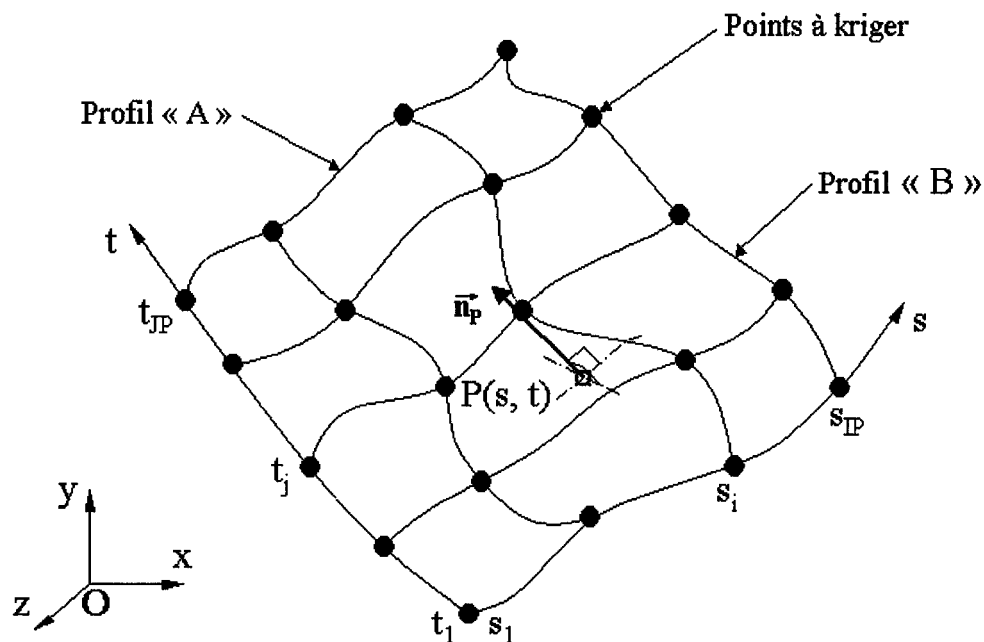


Figure 3.1 Identification de la normale au point  $P$  d'une surface krigée

### 3.1 Calcul des normales à la surface

La normale unitaire est calculée à chaque point krigé de la surface. Puisque l'équation du krigeage est dérivable et continue sur toute la surface, il est possible de déterminer la pente dans les deux directions,  $s$  et  $t$ , en tous points. Le vecteur normal unitaire en un point  $P$  peut donc être écrit sous la forme [32] :

$$\vec{n}_p = \frac{\frac{\partial \vec{P}}{\partial s} \wedge \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}}{\left\| \frac{\partial \vec{P}}{\partial s} \wedge \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right\|} \quad (3.1)$$

### 3.2 Calcul de l'épaisseur maximale

Par la suite, chaque paire de vecteurs unitaires est vérifiée afin de calculer la distance minimum entre la surface et l'intersection des deux normales. La figure 3.2 illustre un exemple 2D d'intersection de normales et l'identification de l'épaisseur maximale. Sullivan utilise une technique similaire dans sa méthode d'avance de front pour des éléments à quatre nœuds [33].

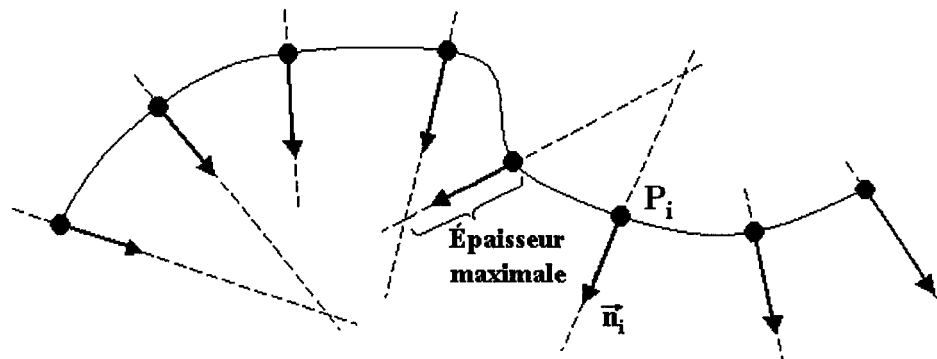
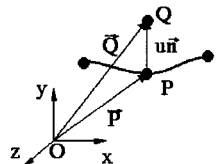


Figure 3.2 Illustration du calcul de l'épaisseur maximale

De façon paramétrique, la position d'un point se déplaçant dans la direction d'un vecteur normal unitaire s'écrit [32] :



$$\vec{Q} = \vec{P} + \vec{n} * u \quad (3.2)$$

où  $\vec{Q}$  est le vecteur des coordonnées d'un point paramétré en  $u$  suivant une normale unitaire  $\vec{n}$  passant par le point krigé  $P$ . La position paramétrique  $u$  peut être positive comme négative. Si les vecteurs  $\vec{n}$  sont parallèles, l'intersection n'est pas calculée et l'épaisseur maximale est considérée comme infinie. La valeur minimum de la distance entre la surface et l'intersection de deux normales correspond à l'épaisseur maximale.

### 3.3 Génération de volume à partir de surface

Lors du maillage de la surface, une option interactive est offerte pour la génération d'un volume, voir la figure 2.5 du chapitre précédent. Si le bouton pour la génération d'un maillage solide est sélectionné, l'interface de la figure 3.3 apparaît.

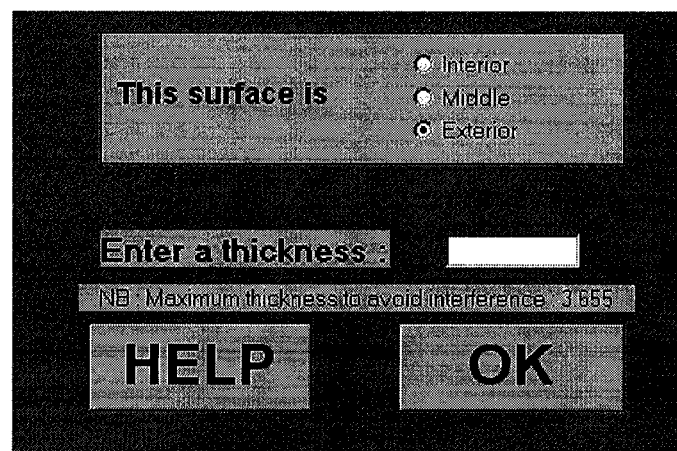


Figure 3.3 Interface pour les paramètres concernant l'épaisseur

Il est ici possible de spécifier si la surface krigée initialement est la face interne ou externe de la pièce ou bien une surface intermédiaire. L'épaisseur du solide est saisie dans la case à cet effet. Une note indique l'épaisseur maximale qui peut être spécifiée sans engendrer de l'interférence entre les surfaces.

Le volume généré par l'extrusion d'une surface krigée suivant des directions normales devient une pièce en 3D pouvant être maillée et analysée par éléments finis. L'utilisateur peut indiquer le nombre d'éléments qu'il désire suivant l'épaisseur. La figure 3.4 montre le résultat de la génération d'un volume par surface krigée avec trois éléments briques suivant l'épaisseur.

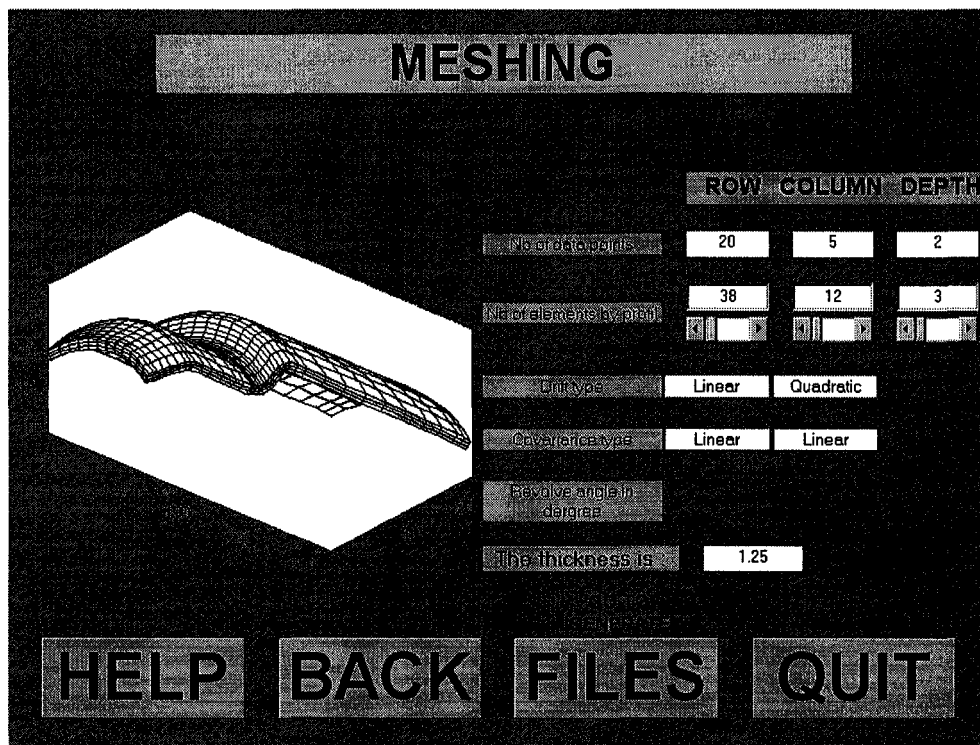


Figure 3.4 Illustration d'une pièce 3D générée par l'extrusion d'une surface dans les directions normales

### 3.4 Applications

Habituellement, quand la densité des points inspectés est grande et que les choix pour les dérivées et les covariances sont adéquats pour la surface désirée, la modélisation épouse vraiment bien la forme de la pièce réelle. Toutefois, il existe certains cas où la génération automatique d'un volume par extrusion ne donne pas l'allure voulue, spécialement sur les arêtes de la frontière. Dans ces cas, des actions particulières peuvent être prises si l'interpolation initiale de la surface est bonne. C'est à l'analyste à spécifier quelles arêtes doivent être modifiées ainsi que les conditions à respecter. Alors les anciens vecteurs des normales sur le côté sélectionné sont simplement remplacés par d'autres vecteurs unitaires ou recalculés par algèbre vectorielle pour être en accord avec les spécifications de l'utilisateur. Les prochaines sous-sections présentent trois cas où la réorientation des normales peut être faite facilement afin de respecter les conditions géométriques aux frontières.

#### 3.4.1 Exemple d'une pièce sphérique

Les normales sur l'arête doivent être orientées dans la même direction qu'un axe spécifié par l'utilisateur. C'est le cas lorsqu'un côté en particulier d'une pièce est usiné dans une direction donnée. La figure 3.5 illustre le trajet de l'outil de coupe ainsi que la nouvelle orientation du vecteur unitaire parallèle à un axe spécifique. Les vecteurs unitaires créés précédemment par calculs sont remplacés par des vecteurs orientés tel que l'utilisateur le désire. Le maillage est redistribué localement dans le but d'éviter d'avoir des éléments dont l'allure dépasserait les limites de distorsion permises. Le maillage final est présenté à la figure 3.6.

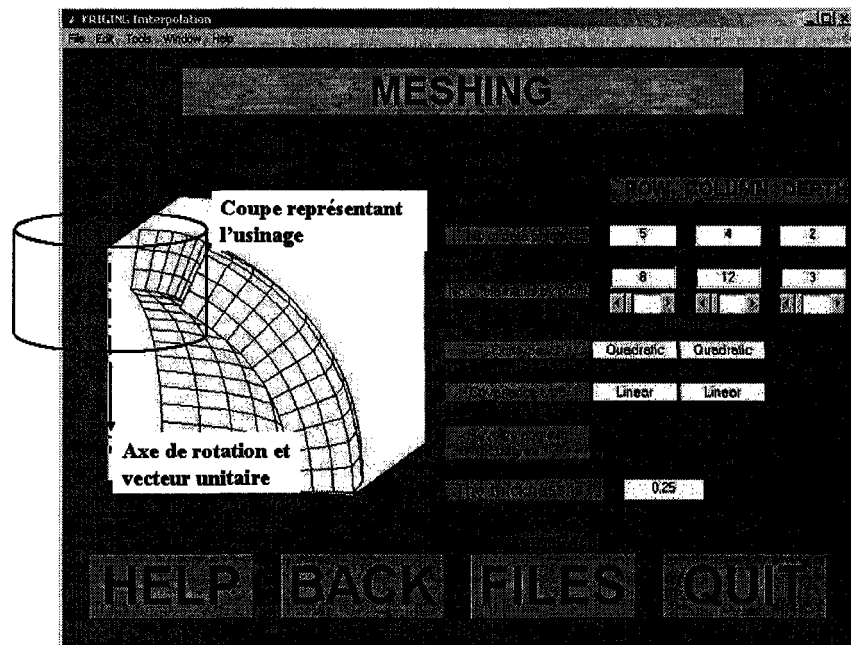


Figure 3.5 Exemple d'une pièce sphérique avant la correction de la normale

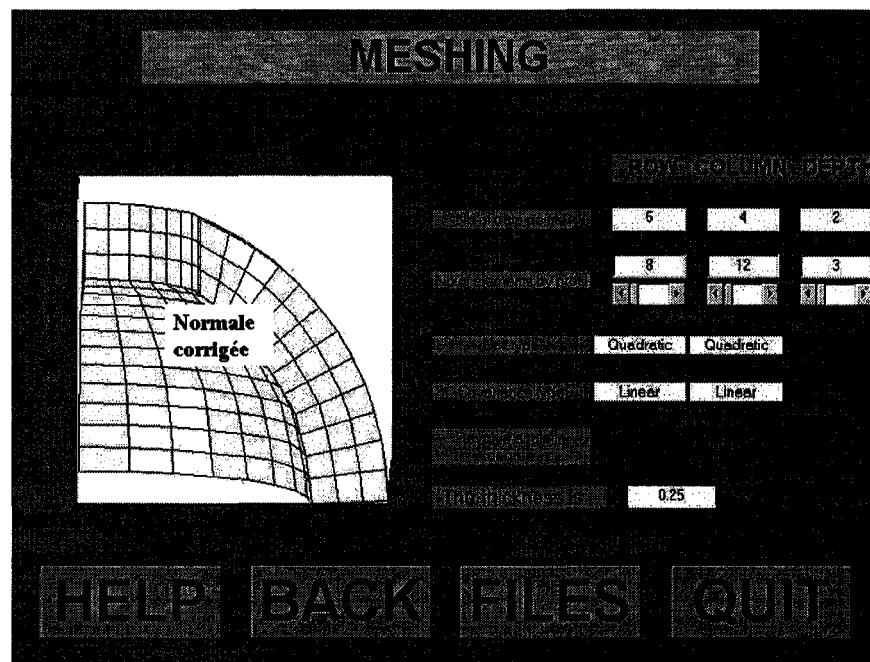


Figure 3.6 Allure du maillage redistribué après réorientation des normales sur le côté usiné



### 3.4.2 Exemple d'une pièce symétrique

Les normales doivent être orientées de façon à former un seul et même plan. C'est le cas lorsque les propriétés de symétrie de la pièce sont utilisées dans le but de réduire la taille, en nombre d'éléments, du modèle. Généralement, les normales calculées à l'aide des dérivées de la surface ne forment pas toutes un même plan de symétrie. Un exemple où l'orientation des normales sont dans des plans de symétrie différents après génération automatique de l'épaisseur est montré à la figure 3.7.

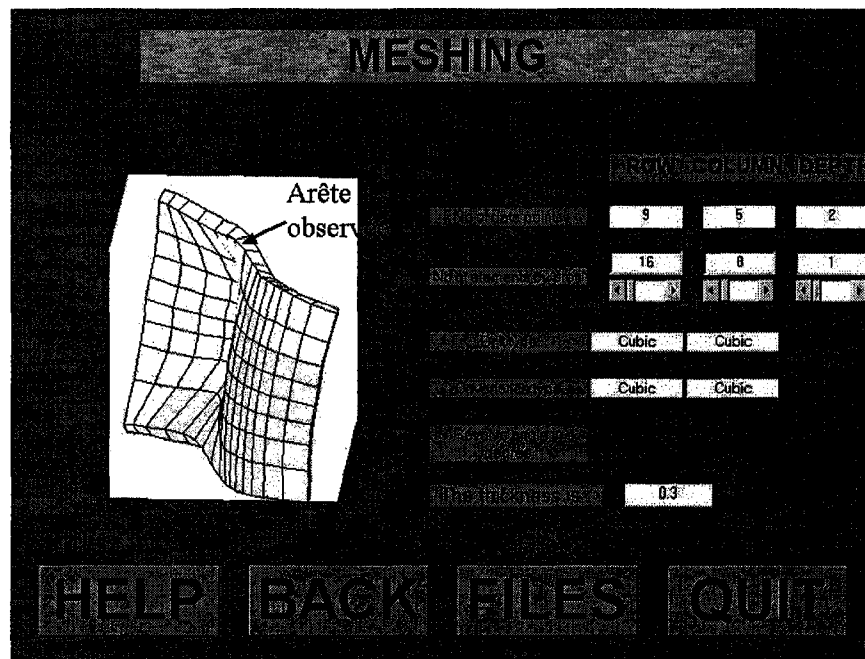


Figure 3.7 Orientation des normales dans des plans différents après génération automatique de l'épaisseur

Dans ce cas en particulier, le plan passant par l'arête de symétrie sur la surface krigée est considéré comme le plan de symétrie. Le vecteur normal à ce plan est déterminé en utilisant les coordonnées des points sur l'arête. Alors, en appliquant le produit vectoriel, il est possible de trouver la nouvelle orientation de la normale à chaque point sur l'arête de symétrie pour la génération du nouveau modèle 3D. Si l'arête que l'utilisateur veut modifier est une ligne droite, un troisième point est créé, ayant la coordonnée en  $X$  du premier point et la coordonnée en  $Y$  du dernier point de la courbe, pour que l'algorithme puisse calculer la direction normale au plan, formé par cette ligne et ce point, définissant par le fait même le plan de symétrie. Pour le cas très particulier d'une arête suivant parfaitement un axe géométrique, des informations supplémentaires sont demandées à l'utilisateur. La figure 3.8 montre l'allure de la face de symétrie sur le côté ciblé par l'analyste.

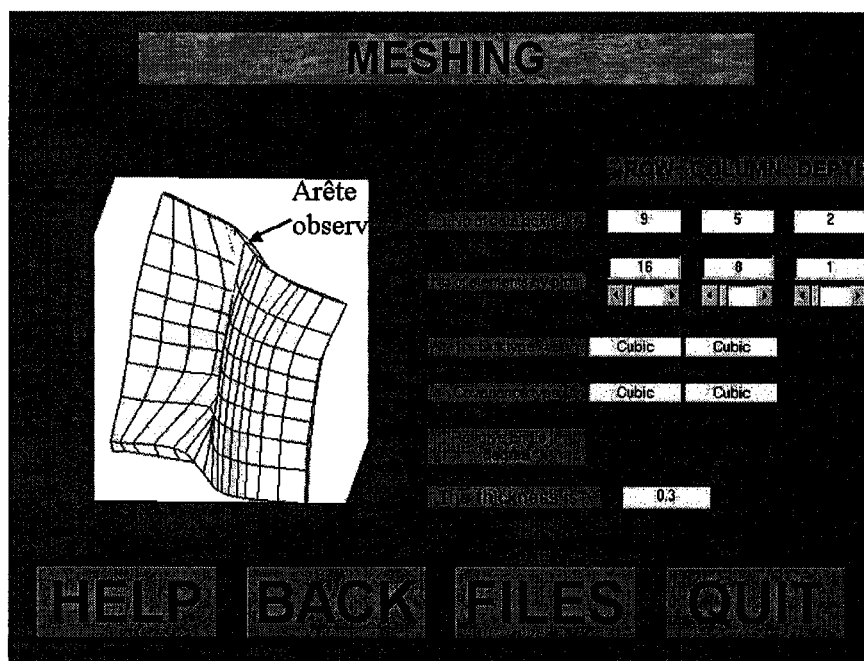


Figure 3.8 Direction de la normale sur la face de symétrie ciblée par l'analyste

### 3.4.3 Exemple d'un angle de dépouille pour un outil de coupe

Les normales doivent croiser un axe de rotation avec un angle spécifique. C'est le cas lorsque le côté de la pièce doit être orienté avec un angle particulier que l'utilisateur doit déterminer. Par exemple, les bords d'attaque des outils de coupe, utilisés dans l'industrie de poinçonnage, sont aiguisés à angle dans le but de réduire la force de pénétration et de permettre une évacuation plus facile de la pièce poinçonnée. Donc, il est évident que le volume, généré automatiquement à l'aide des normales de l'arête symbolisant le bord d'attaque de direction  $\beta$ , ne représente pas l'allure désirée de l'outil de coupe. Dans un tel cas, l'utilisateur doit identifier un axe de référence ou soumettre le vecteur unitaire de celui-ci et la valeur de l'angle de dépouille  $\alpha$ , pour que l'algorithme soit en mesure de déterminer la nouvelle orientation des normales sur le bord d'attaque.

La figure 3.9 montre un outil de coupe avec un bord d'attaque qui est généré automatiquement avec le calcul des normales à partir de la surface krigée. Ce côté est corrigé avec l'application d'un angle  $\alpha$  qui respecte la géométrie réelle de l'outil de coupe (voir la figure 3.10).

Les cas présentés sont généraux et applicables à tous les cas de la réalité, où le vecteur de la normale suit soit un axe connu, un plan connu ou une direction désirée. Si d'autres cas surviennent, ils pourront facilement être intégrés à l'algorithme existant.

Ce chapitre a aussi permis de participer à la 4th International Conference on Industrial Automation [34].

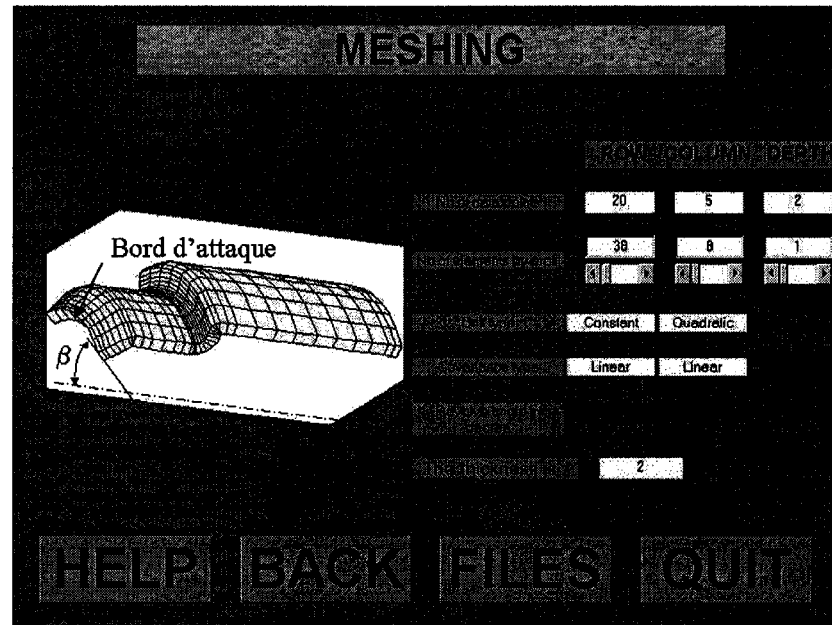


Figure 3.9 Maillage 3D d'un outil de coupe généré à l'aide de l'extrusion d'une surface krigée

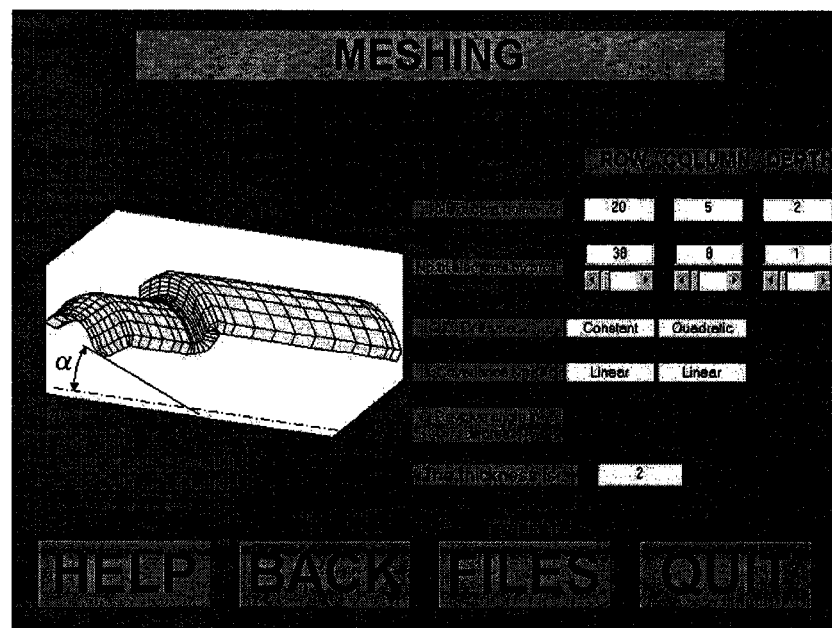


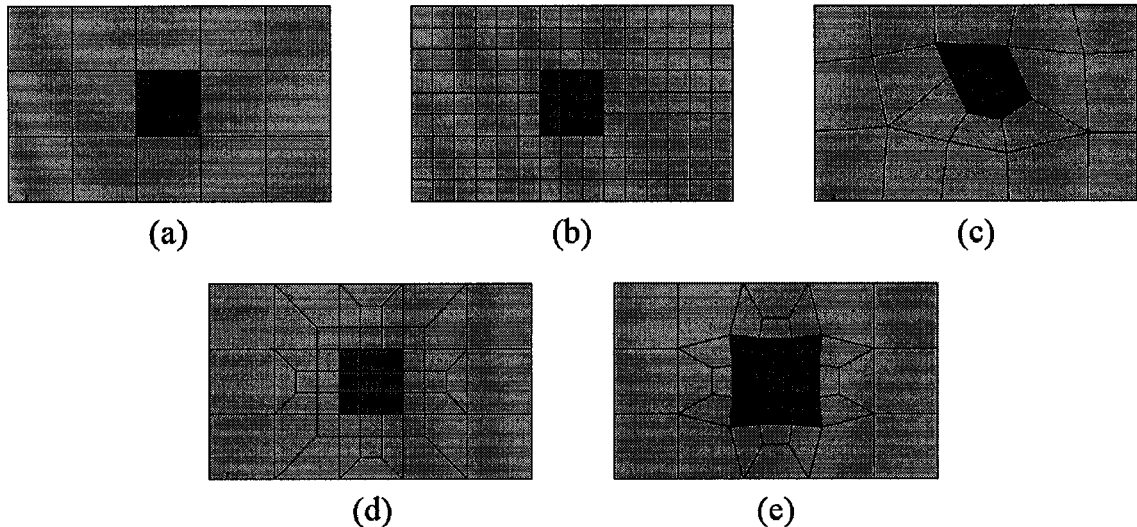
Figure 3.10 Correction de l'orientation des normales sur le bord d'attaque d'un outil de coupe par un angle  $\alpha$

## CHAPITRE 4

### RAFFINEMENT LOCAL DU MAILLAGE

#### 4.1 Introduction

Lors d'une analyse d'un problème typique d'ingénierie par éléments finis, le but est d'obtenir des résultats avec le plus de précision possible. Cependant, les coûts d'analyse et les temps de calculs sont proportionnels au nombre d'éléments, tandis que la précision est obtenue avec des éléments de petites tailles. Par exemple, la figure 4.1a représente un maillage structuré de base avec des éléments de grande dimension.



■ : Zone critique déterminée en guise d'illustration seulement.

Figure 4.1 Représentation de la zone critique et du nombre d'éléments dans (a) un maillage grossier, (b) un maillage entièrement raffiné et les maillages raffinés localement : (c) librement par Ansys®, (d) par Ansys® avec les connectivités minimisant la largeur de bande et utilisé par Kwak [22-24] et (e) le patron elliptique

Donc, pour obtenir une meilleure précision sur les résultats et conserver un maillage structuré, tous les éléments doivent avoir une taille similaire et plus petite que dans le maillage de départ. La figure 4.1b montre une hausse considérable du nombre d'éléments, augmentant par le fait même le temps de calcul et les coûts. La figure 4.2 montre bien l'augmentation du temps de calcul en fonction du nombre d'éléments.

### Temps de calcul par rapport au nombre d'éléments

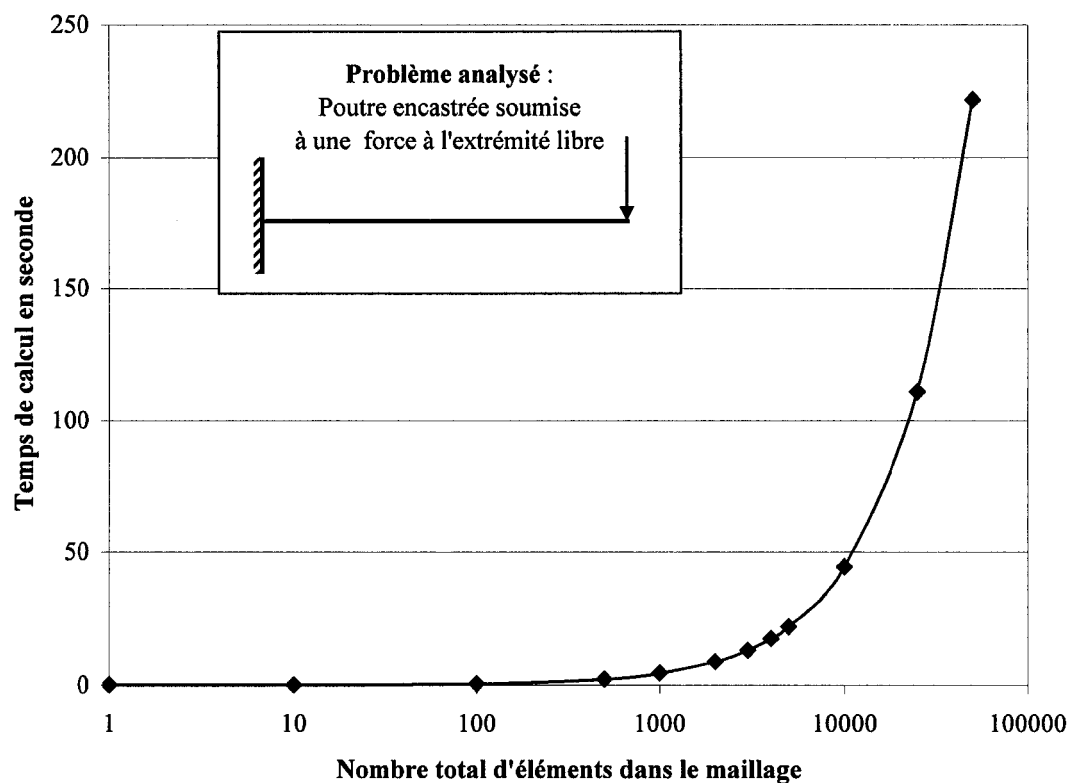


Figure 4.2 Graphique du temps de calcul en fonction du nombre d'éléments dans le maillage

Par contre, il n'est pas toujours nécessaire d'avoir une grande précision sur tout le domaine d'analyse. Souvent, seules les zones où les résultats sont les plus critiques, appelées « zones critiques », nécessitent un raffinement de maillage. La figure 4.1c montre un exemple de modification local du maillage, le modèle utilisé ici est le maillage libre, « free mapping », de Ansys®. Le patron utilisé pour le raffinement local peut varier. Le modèle de la figure 4.1d, basé sur une décomposition « octree », se retrouve dans la littérature [22-24]. Il est aussi utilisé par Ansys® lorsque la connectivité, des éléments du maillage de base, cherche à minimiser la largeur de la diagonale de la matrice des coefficients. La figure 4.1e quant à elle illustre un patron de raffinement basé sur des ellipses concentriques. Le développement et l'algorithme de ce modèle seront discutés à la fin de ce chapitre. Il importe de remarquer que les derniers maillages, de c à e, ne sont plus structurés.

Dans les exemples présentés à la figure 4.1, la zone critique est déterminée au centre de la surface pour permettre une illustration complète des patrons de raffinement. Mais souvent, les résultats les plus critiques se trouvent sur les frontières. Les zones à raffiner peuvent être déterminées de façon automatique ou bien manuelle. Présentement, plusieurs études [35, 36] portent sur l'automatisation du raffinement local par l'analyse des résultats obtenus d'un maillage grossier. Puisque les caractéristiques et les critères d'analyse diffèrent d'un problème à un autre, l'expert dans le domaine demeure le mieux placé pour pointer les zones critiques. Dans cette section du travail se trouve un algorithme pour la sélection d'un élément de façon manuelle et les étapes de développement d'un schéma elliptique de raffinement local de maillage. Par la suite, le modèle elliptique pourrait être adapté à un algorithme de raffinement automatisé.

## 4.2 Sélection manuelle de la zone critique

Pour ce générateur de maillage, l'élément au centre de la zone où l'utilisateur veut obtenir une meilleure précision, est sélectionné manuellement. La méthode utilisée pour la sélection d'un élément est décrite dans les prochaines lignes. Elle se divise en six étapes :

- Calcul de la plus grande diagonale pour le rayon du cercle de capture
- Validation du choix de l'utilisateur
- Vérification des nœuds compris dans le cercle
- Sélection des éléments ayant leurs quatre nœuds dans le cercle
- Validation finale par la méthode de Newton-Raphson à deux variables
- Sélection des éléments adjacents

### 4.2.1 Calcul de la diagonale maximale

Premièrement, la fonction calcule la longueur de la plus grande diagonale dans le maillage. Pour chaque élément, les distances entre les nœuds 1 et 3 et les nœuds 2 et 4 sont calculées de la façon suivante :

$$d_1 = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} \quad (4.1)$$

$$d_2 = \sqrt{(x_4 - x_2)^2 + (y_4 - y_2)^2} \quad (4.2)$$

Où  $d_1$  et  $d_2$  sont les longueurs des diagonales d'un élément,  $x_i$  et  $y_i$  sont les coordonnées en  $X$  et en  $Y$  du nœud  $i$ . La valeur maximale est conservée et vérifiée avec les diagonales des autres éléments. Cette longueur servira de rayon pour créer le cercle qui englobera l'élément sélectionné.



Dans l'exemple de la figure 4.3, la diagonale  $d_1$  serait retenue comme maximum. Présentement, cette étape n'est faite qu'une seule fois, au début. Mais, l'algorithme permet à l'utilisateur de raffiner plusieurs fois le même maillage. Alors, si la valeur de la plus grande diagonale n'est pas recalculée, le nombre d'éléments inclus dans le cercle risque d'être plus élevé. Donc, une réévaluation du rayon pourrait réduire le temps de calcul.

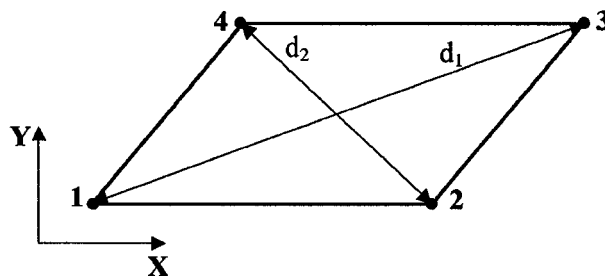


Figure 4.3 Illustration d'un élément quadrangulaire et de ses deux diagonales

### 4.2.2 Sélection de l'utilisateur

Par la suite, l'utilisateur sélectionne un élément à l'intérieur de la surface maillée, comme le montre la figure 4.4. Cette opération permet d'obtenir la coordonnée d'un point grâce à la fonction « ginput » de MatLab®. En plus de donner la position en  $X$  et  $Y$  du curseur, la fonction « ginput » retourne le numéro du bouton appuyé. Donc, si l'analyste préfère ne plus raffiner le maillage, il n'a qu'à utiliser un autre bouton que celui de gauche<sup>1</sup> sur la souris ou bien à choisir un point à l'extérieur du maillage. Il est à noter que le programme de génération de maillage raffinerait tant que l'utilisateur n'y mettrait pas fin.

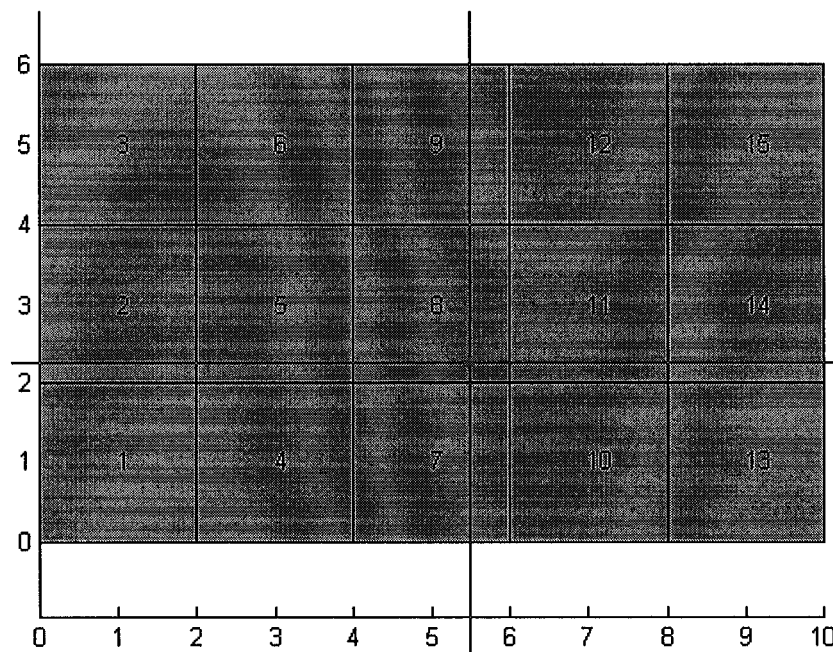


Figure 4.4 Visualisation de tous les éléments et de la croix de localisation permettant la sélection d'un élément

<sup>1</sup> Sur les souris standards, le bouton de gauche correspond au premier bouton.

### 4.2.3 Vérification des nœuds à l'intérieur du cercle

Cette troisième étape consiste à recueillir tous les nœuds du maillage qui sont inscrits dans un cercle de rayon équivalent à la longueur de la plus grande diagonale calculée précédemment. Donc à chaque nœud, on vérifie que le rayon est plus grand que la distance entre le nœud et les coordonnées du point sélectionné par l'utilisateur. Pour faire suite à l'exemple de l'étape précédente, la figure 4.5 montre que les nœuds : 9, 10, 11, 13, 14, 15 et 18 sont englobés par le cercle.

On remarque aussi sur cette même figure que tous les nœuds à l'intérieur du cercle sont identifiés par des étoiles. L'identification des éléments à l'intérieur du cercle se fait à l'aide de ces nœuds.

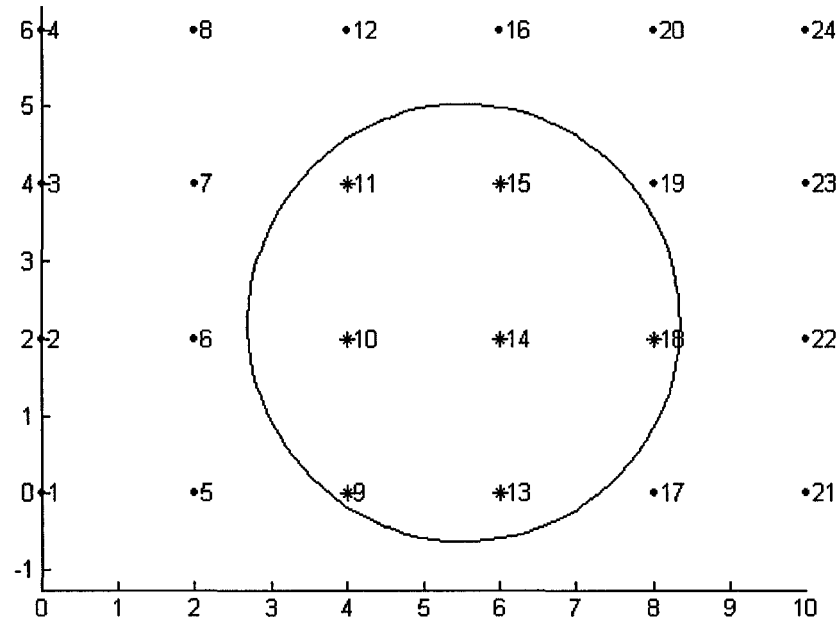


Figure 4.5 Vérification des nœuds dans le cercle ayant un rayon équivalent à la plus grande diagonale

L'objectif de la pré-sélection près de l'endroit où l'utilisateur a cliqué, est de réduire le temps de calcul. Un test est fait avec le « Profiler » du logiciel MatLab® afin de valider cette hypothèse. Le module « Profiler » enregistre le temps de calcul et le nombre d'appels de chaque ligne de programmation. Le résumé des résultats est présenté dans le tableau 4.I.

Tableau I

Temps de calcul de 25 essais de 1000 sélections pour comparer la rapidité acquise par une pré-sélection

Essais pour 1000 sélections aléatoires.	Temps de calcul en seconde			
	Éléments pré-sélectionnés		Tous les éléments	
	avec Profiler	Sans Profiler	avec Profiler	Sans Profiler
Moyenne des 25 essais :	8,142	6,487	29,898	25,266
<b>Données recueillies dans le "Profiler" pour la fonction de Newton à 2 variables</b>				
Sous-fonction Newton_F_G :	31895	appels	200581	appels
Temps total dans cette fonction :	110,127	secondes	683,605	secondes
% moyen du temps dans la fonction :	54,1%		91,5%	

Le test est une boucle de vingt-cinq essais. Pour chaque essai, mille sélections automatiques et aléatoires sont faites sans faire afficher les graphiques. Le temps de résolution est conservé à chaque fois. La première fois, le test est fait avec la pré-sélection des éléments dans un cercle dont le rayon équivaut à la plus grande diagonale des éléments du maillage initial. La moyenne du temps de résolution pour les vingt-cinq essais est de 6,487 secondes.

Par la suite, le même test est effectué, mais cette fois-ci le module « Profiler » est démarré pour recueillir le nombre d'appels de chaque sous fonction. Les résultats montrent que ce module ralentit l'exécution du même programme, car la moyenne du temps est rendue à 8,142 secondes. Par le fait même, le « Profiler » dévoile que la sous-fonction de validation avec la méthode de Newton-Raphson, énoncée dans les prochaines étapes, est en majeure partie responsable de la lenteur de la sélection d'un

élément. Cette sous-fonction est mise en opération près de trente-deux mille fois pour une durée totale d'environ 110 secondes et un pourcentage de 54,1% du temps de résolution de l'algorithme de sélection.

En guise de comparaison, un test où tous les éléments du maillage de départ sont vérifiés, est fait. La sous-fonction de validation par la méthode de Newton à deux variables est appelée plus de deux cent mille fois, pour un pourcentage d'occupation de 91,5%. La différence entre les deux méthodes est très grande pour un maillage ne totalisant que quinze éléments. Finalement, la preuve est faite : une pré-sélection des éléments est une stratégie efficace.

#### 4.2.4 Vérification des éléments à l'intérieur du cercle

Maintenant, une récupération des éléments à l'intérieur du cercle est faite, à partir des nœuds obtenus lors la section précédente. Un élément est considéré inscrit au cercle, si et seulement si, tous ses nœuds sont à l'intérieur du cercle. Dans le cas d'éléments quadrangulaires, les éléments dont les quatre nœuds se trouvent dans un rayon correspondant à la plus grande diagonale sont retenus. Donc pour chaque élément, l'algorithme vérifie si les nœuds de l'élément en question sont tous présents dans la liste des nœuds trouvés à l'étape précédente. À la figure 4.6, il est facile de voir par leur ton différent que les éléments 7 et 8 sont totalement à l'intérieur du cercle délimiteur. Il reste maintenant à savoir, lequel des éléments 7 et 8 l'utilisateur a vraiment sélectionné.

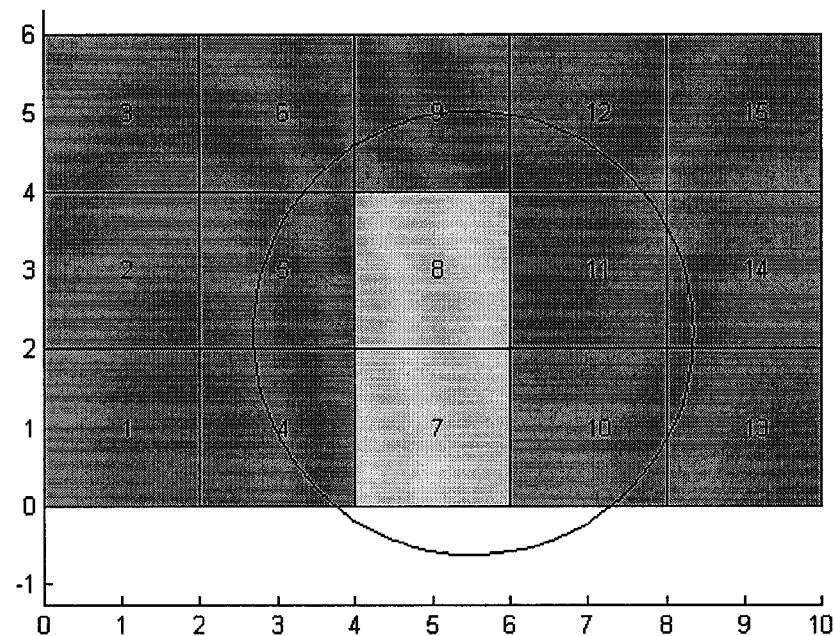


Figure 4.6 Vérification des éléments dans le cercle ayant un rayon équivalent à la plus grande diagonale

#### 4.2.5 Validation de l'élément sélectionné

Lors de l'avant-dernière étape de la sélection d'un élément et de son entourage, l'indice de l'élément sélectionné par l'analyste est enfin trouvé. La coordonnée du point choisi est interpolée dans un élément paramétré de référence afin de déterminer précisément l'indice de l'élément désigné par l'utilisateur.

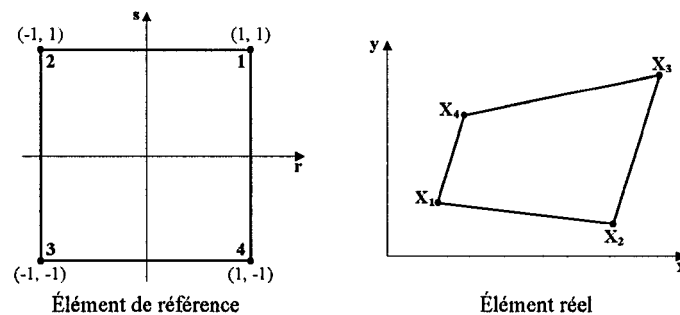


Figure 4.7 Illustration d'un élément isoparamétrique à quatre nœuds pour la construction de la fonction d'interpolation

La fonction d'interpolation est construite à partir du modèle de la figure 4.7. Puisque l'élément est isoparamétrique, les nœuds sont à la fois nœuds géométriques et nœuds d'interpolation. Le choix de la base polynomiale de la fonction d'interpolation est tiré du triangle de Pascal. Une illustration du triangle de Pascal, voir aussi Bathe [2], est donnée à la figure 4.8.

Comme le montre la figure 4.8, le polynôme ne peut être complet parce que l'élément compte seulement quatre variables nodales. Le choix idéal respectant la symétrie et la continuité de la déformation entre les éléments, est la base bilinéaire en  $r$  et  $s$ .

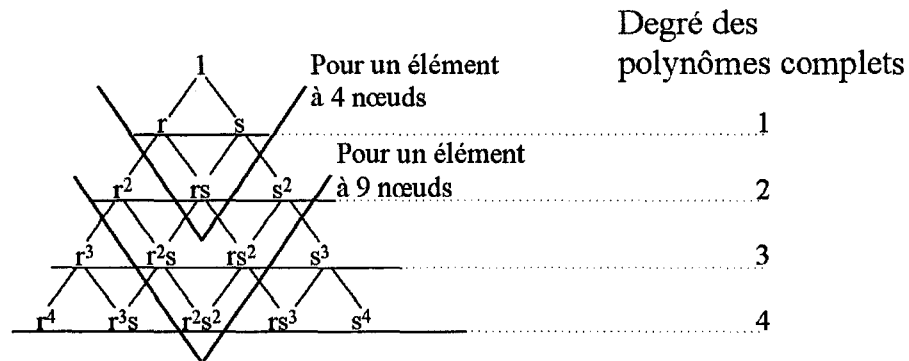


Figure 4.8 Illustration du triangle de Pascal<sup>1</sup>

La fonction d'interpolation  $N$  est exprimée à l'équation, où  $r$  et  $s$  sont les coordonnées paramétriques de l'élément de référence.

$$N = [(1+r)(1+s) \quad (1-r)(1+s) \quad (1-r)(1-s) \quad (1+r)(1-s)] \quad (4.3)$$

Alors, la fonction décrivant tous les points à l'intérieur de l'élément est définie par l'équation 4.4, où  $x$  et  $y$  sont les coordonnées dans le domaine réel correspondant à un point  $r$  et  $s$  et  $X_i$  et  $Y_i$  sont les coordonnées réelles des quatre nœuds de l'élément.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = N(r, s) * \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

<sup>1</sup> Tiré et adapté de Bathe [2].



L'équation 4.5, énonce les fonctions à résoudre par la méthode itérative.

$$\begin{bmatrix} F(r,s) \\ G(r,s) \end{bmatrix} = N(r,s) * \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_{usager} \\ Y_{usager} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Pour la méthode de Newton-Raphson à deux variables, la fonction itérative est décrite par l'équation 4.6. Le jacobien des fonctions  $F$  et  $G$  est obtenu par la multiplication de la dérivée partielle de la fonction d'interpolation, équation 4.7, et des coordonnées réelles des quatre nœuds de l'élément,  $X_i$  et  $Y_i$ .

$$\begin{bmatrix} r_{i+1} \\ s_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_i \\ s_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F(r,s) \\ G(r,s) \end{bmatrix} / \begin{bmatrix} \partial F/\partial r & \partial G/\partial r \\ \partial F/\partial s & \partial G/\partial s \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$\begin{bmatrix} \partial N/\partial r \\ \partial N/\partial s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+s) & -(1+s) & -(1-s) & (1-s) \\ (1+r) & (1-r) & -(1-r) & -(1+r) \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Les critères de convergence, pour l'algorithme de l'intégration de Newton-Raphson à deux variables, sont établis en relation avec la taille de l'élément de référence. Le premier critère, l'écart de l'erreur relative entre les valeurs de l'itération précédente et les nouvelles valeurs, doit être inférieur à  $10^{-6}$ , valeur déterminée par expérience. Le second impose un maximum de vingt itérations, car lors d'essais, la convergence était régulièrement atteinte en moins de vingt itérations. Pour le dernier critère, puisque les coordonnées paramétriques  $r$  et  $s$  sont unitaires, il y a divergence lorsque l'intensité de  $r$  ou de  $s$  excède 2.

Lorsqu'il y a convergence pour les valeurs de  $r$  et  $s$ , l'algorithme vérifie si les valeurs se trouvent à l'intérieur des limites de l'élément de référence,

$$-1 \leq r \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq s \leq 1 \quad (4.8)$$

Si tel est le cas, le numéro de l'élément sélectionné est retourné. Dans l'exemple, l'élément 8 est choisi par l'utilisateur, la figure 4.9 l'illustre bien.

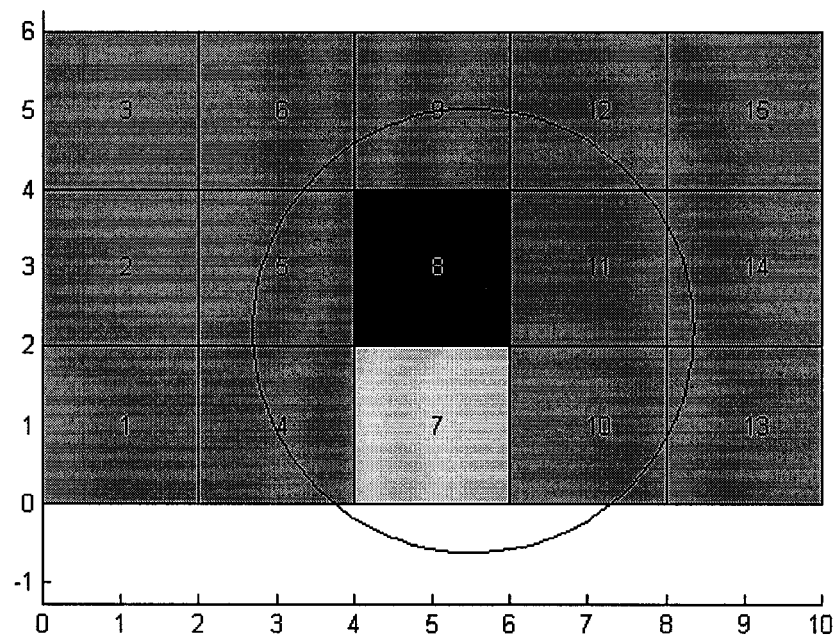


Figure 4.9 Affichage de l'élément sélectionné par l'analyste

#### 4.2.6 Identification des éléments voisins

Pour terminer la sélection, il est nécessaire de retirer les éléments de l'entourage immédiat de l'élément ciblé pour la transformation du maillage lors du raffinement. À cette étape il est difficile de déterminer le nombre d'élément entourant l'élément pointé. La figure 4.10 montre certains types de voisinage pouvant exister pour des éléments quadrangulaires. Par contre, comme le patron de raffinement, expliqué au point 4.3, est développé pour raffiner un maillage initial parfaitement structuré, il se peut que l'élément sélectionné ne puisse pas être raffiné.

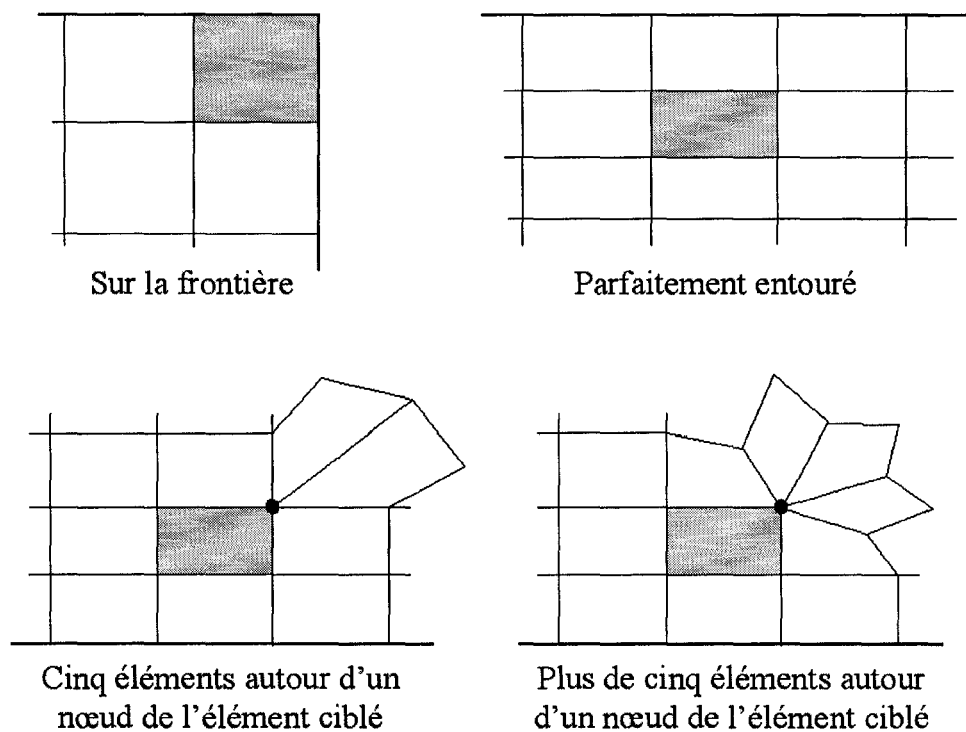


Figure 4.10 Quelques modèles possibles de voisinage pour l'élément sélectionné

Mais la vérification pour l'acceptation de l'élément sélectionné se fera lors d'une prochaine étape. Pour le moment, tous les éléments ayant un nœud ou plus en commun avec l'élément visé sont retournés. On peut voir sur la figure 4.11 l'élément sélectionné ainsi que tous les éléments qui l'entourent.

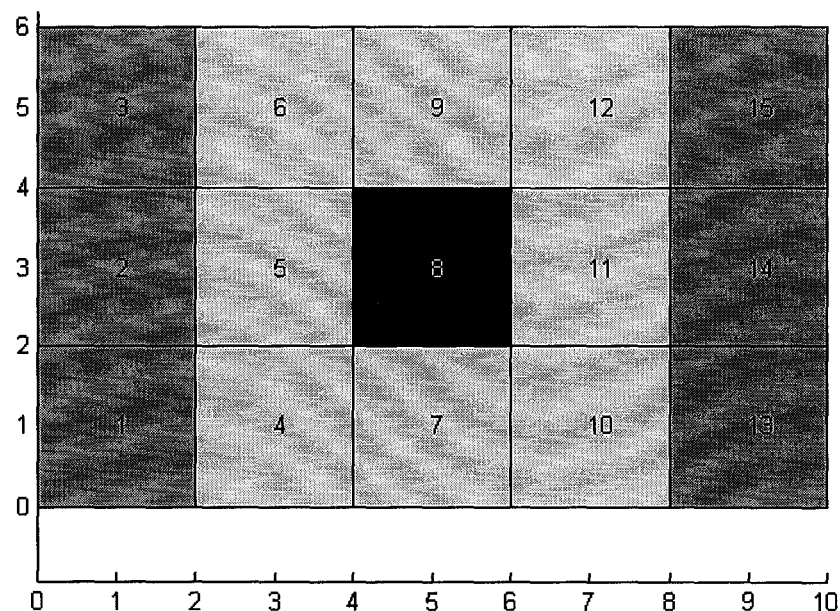


Figure 4.11 Affichage de l'élément sélectionné par l'analyste et des éléments de son entourage

### 4.3 Développement d'un schéma elliptique pour le raffinement

Après avoir déterminé la zone à raffiner dans le maillage de base, le modèle de raffinement est appliqué. L'idée initiale du schéma elliptique découle de la volonté d'un raffinement très local du maillage. De plus, le but est de représenter la taille et la forme de l'élément à raffiner. Le premier algorithme permettant la création des ellipses n'est pas automatisé. Les nouveaux nœuds pour la création des éléments du raffinement se trouvent sur des ellipses concentriques et à des angles stratégiques pour obtenir un maillage bien proportionné. Les ellipses, d'où vient le nom du modèle, sont générées à l'aide d'un facteur d'amplification pour obtenir un maillage dans lequel la taille des éléments augmente progressivement en s'éloignant du centre. La figure 4.12 montre les ellipses concentriques ainsi que la position des nœuds.

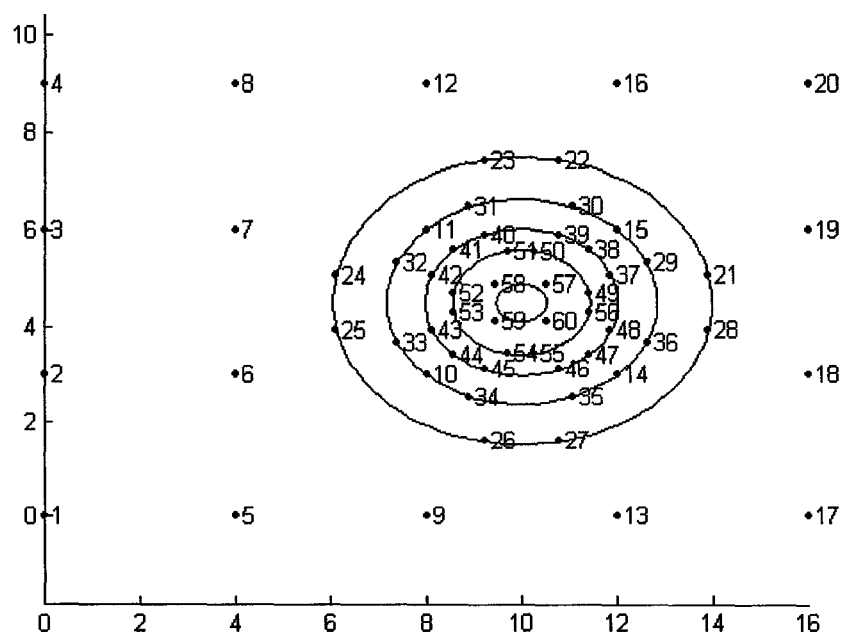
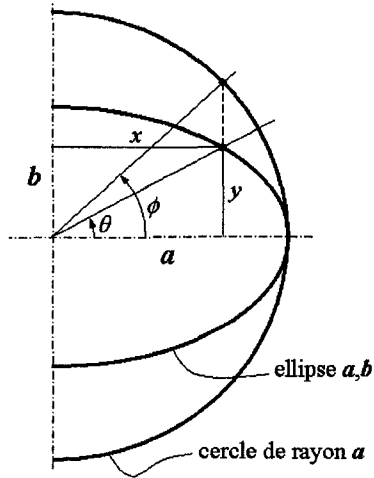


Figure 4.12 Illustration des nœuds pour le modèle de raffinement elliptique sur les ellipses concentriques

L'équation générale d'une ellipse est donnée par :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (4.9)$$

Sous la forme paramétrique, une ellipse est représentée par l'équation 4.10. Mais attention, l'angle  $\phi$  n'est pas un angle cartésien, mais bien un angle paramétré. La transformation d'un angle cartésien en angle paramétré est donnée à l'équation 4.11.



$$x = a * \cos \phi \quad \text{et} \quad y = b * \sin \phi \quad (4.10)$$

$$\text{Puisque, } \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{b * \sin \phi}{a * \cos \phi} = \frac{b}{a} \tan \phi \quad (4.11)$$

$$\text{Alors, } \phi = \tan^{-1} \left( \frac{a}{b} \tan \theta \right)$$

Pour revenir à la figure 4.12, les paramètres  $a$  et  $b$  de l'ellipse sont déterminés en fonction de la dimension de l'élément choisi. Les autres paramètres tels le facteur d'amplification ou les angles paramétrés pour la position des nouveaux nœuds sont trouvés par tâtonnement jusqu'à l'obtention d'une apparence satisfaisante.

Une méthode graphique et proportionnelle est faite tout en minimisant l'écart entre les angles des nouveaux éléments. La figure 4.13 illustre le quadrant de cette méthode avec des éléments carrés de deux unités de côtés.

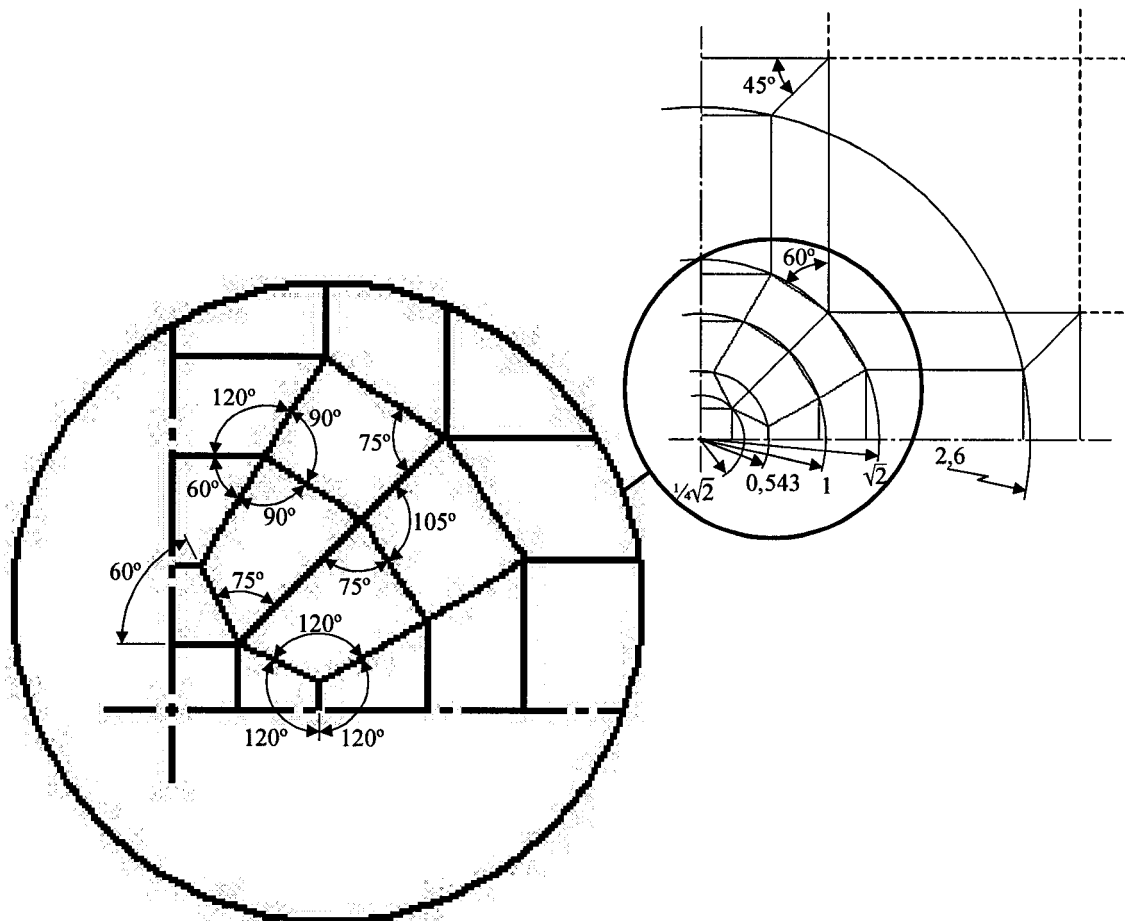


Figure 4.13 Méthode graphique et proportionnelle d'un quadrant pour le schéma elliptique

Suite au développement par la méthode graphique, le maillage dans le système unitaire est importé dans le logiciel d'analyse par éléments finis, Ansys®. Le logiciel émet un message d'avertissement spécifiant que le maillage actuel présente douze « Bad Shape Elements ». Les éléments non conformes sont identifiés à la figure 4.14.

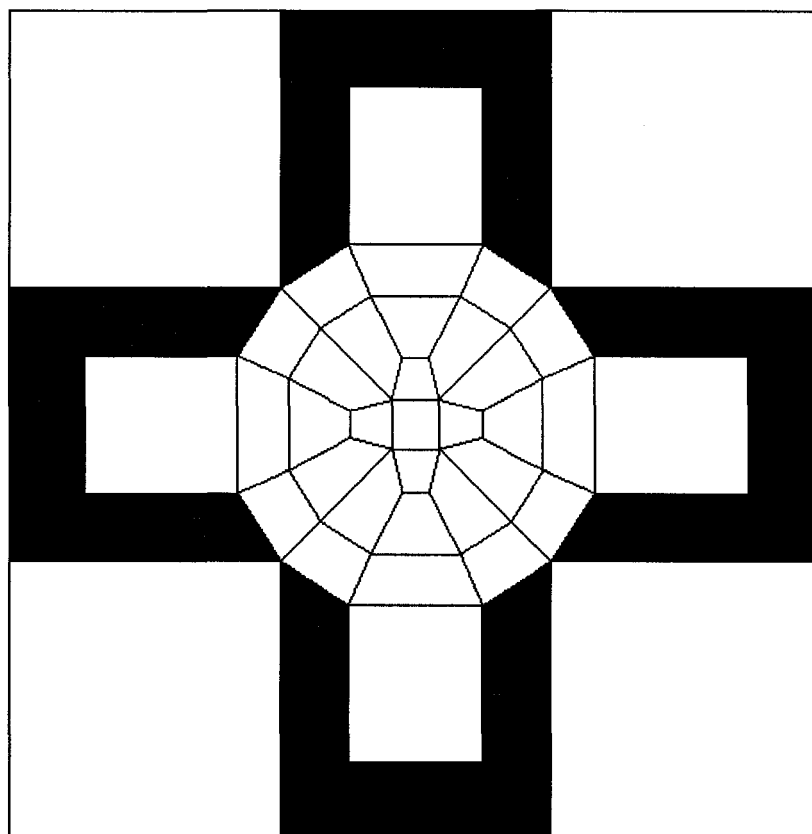


Figure 4.14 Identification des « Bad Shape Elements » dans le schéma de raffinement elliptique obtenu par la méthode graphique



Sachant que les résultats obtenus lors de l'analyse par éléments finis sont directement reliés à la qualité du maillage, les autres modèles de raffinement de la figure 4.1 sont testés. Dans les deux autres cas, le « free mapping » de Ansys® et un patron basé sur la décomposition « octree » qu'utilise Kwak [22-24] et Ansys®, on retrouve de un à quatre « Bad Shape Elements », comme le prouve la figure 4.15.

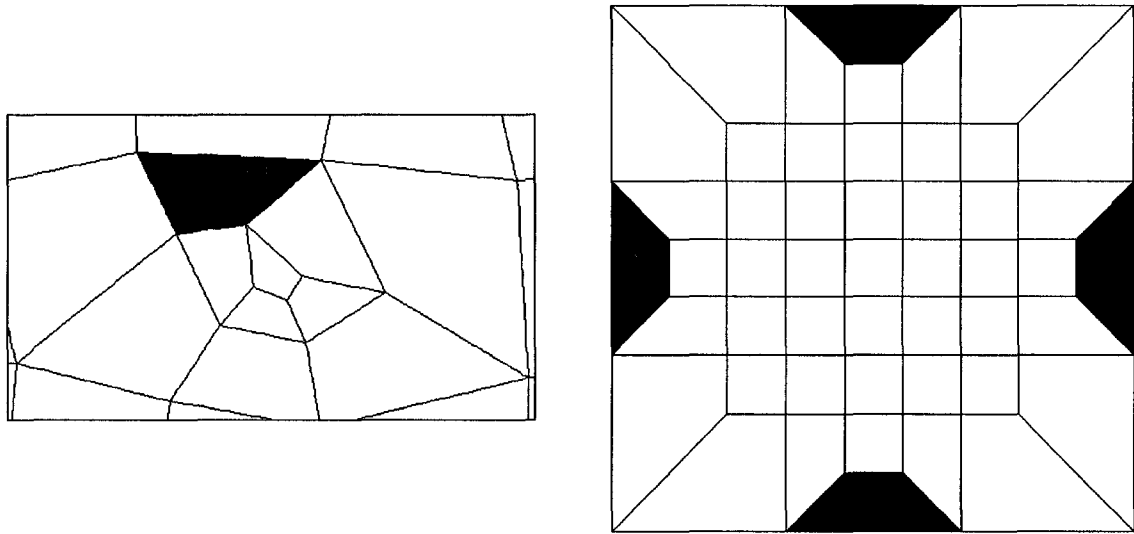


Figure 4.15 Illustration des « Bad Shape Elements » pour les modèles de « free mapping » de Ansys® et celui utilisé Kwak [22-24]

Suite à ces observations, les questions sont : « De quelle façon Ansys® juge-t-il les maillages pour en avertir l'utilisateur et quelle influence la distorsion peut-elle avoir sur les résultats d'une analyse avec un maillage de la sorte ? »

Premièrement, pour vérifier la qualité du maillage, le logiciel Ansys® se donne quelques normes de vérification [37]. Le logiciel retourne des messages d'avertissement lorsque l'« Aspect Ratio » (AR), pour des éléments à quatre nœuds, est supérieur à 20 ou que le parallélisme entre deux côtés opposés est supérieur à  $70^\circ$  ou que l'élément a un angle intérieur plus grand que  $155^\circ$ . La figure 4.16 présente les cas typiques de « Bad Shape » pour les éléments quadrilatéraux. Dans les références théoriques du logiciel Ansys® [37], il est écrit que des éléments aussi étirés ou distordus méritent un avertissement. Suite au peu d'informations fournies, une étude sur la distorsion des éléments est faite.

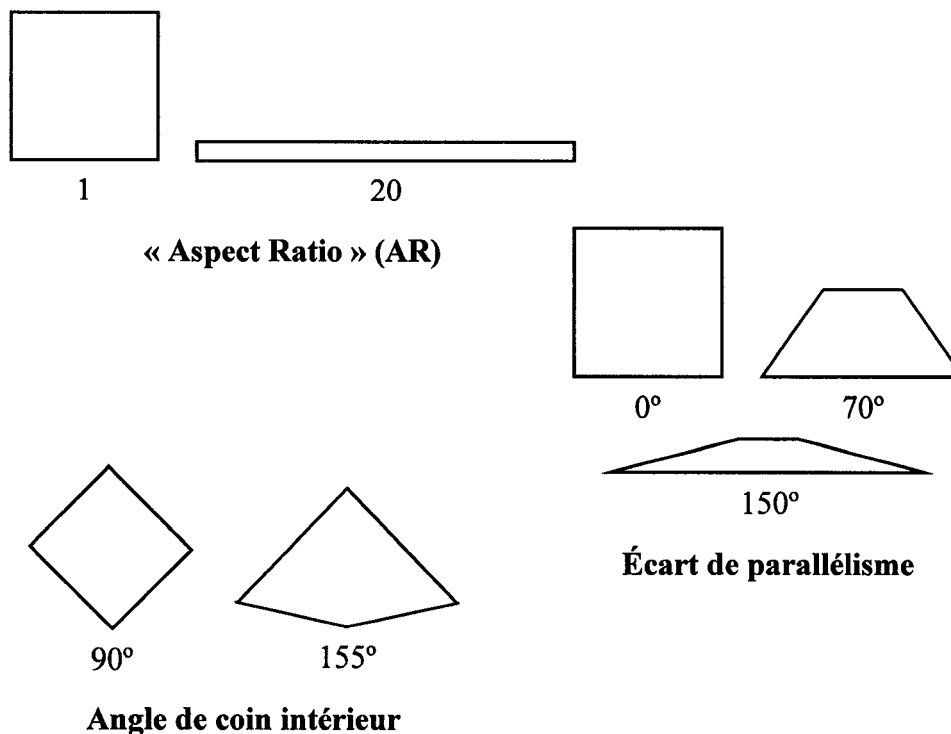


Figure 4.16 Présentation des cas typiques de « Bad Shape » pour les éléments quadrilatéraux<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Tiré et adapté du manuel de référence théorique de Ansys® [31]

### 4.3.1 Étude sur la distorsion des éléments

Cette étude a pour objectif de vérifier l'effet de la distorsion des éléments sur la contrainte normale d'une poutre en flexion. Les trois aspects mentionnés précédemment seront analysés, tels : l'AR, l'angle obtus et le parallélisme.

#### 4.3.1.1 Énoncé du problème

La poutre encastrée de 600 mm de longueur, de 30 mm de hauteur et de 20 mm d'épaisseur est soumise à une charge uniformément répartie de 4 N/mm. Les points retenus pour la comparaison des résultats sont situés respectivement à 120 mm, 150 mm et 180 mm de l'encastrement. Ces positions stratégiques sont déterminées dans le but d'obtenir un plus vaste intervalle des résultats. La figure 4.17 illustre l'énoncé du problème.

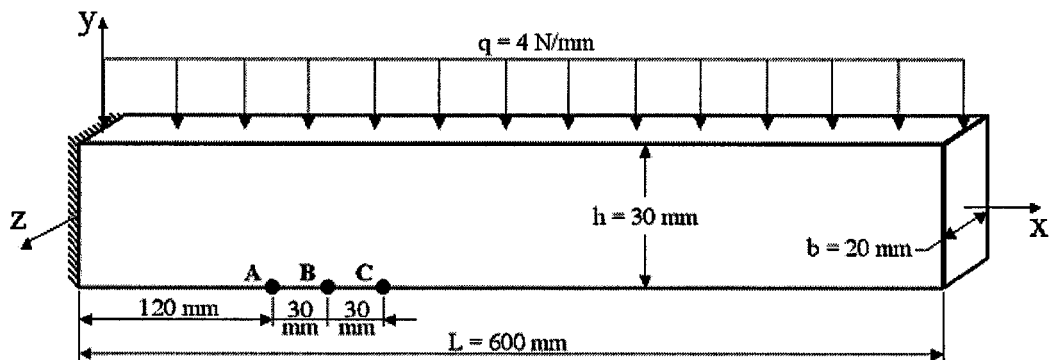


Figure 4.17 Illustration d'une poutre encastrée soumise à une charge uniformément répartie

Les éléments utilisés pour l'étude sont des éléments « Plane42 » sans l'utilisation des fonctions d'interpolation améliorées. Tout au long de l'analyse, il y a trois éléments en hauteur, selon Y. Alors pour faire varier l'AR, le nombre d'éléments longitudinaux, selon l'axe des X, varie. Pour obtenir une bonne analyse, le nombre d'observation est

important. De plus, pour le calcul par éléments finis, il doit y avoir au minimum un nœud vis-à-vis un point de référence. C'est pourquoi, pour la comparaison sous l'effet de l'AR, la longueur des éléments doit être multiple à la fois de la position d'un point de référence et de la longueur de la poutre. L'AR peut donc être de 1, 2, 3, 4, 6, 12 et 15. Les figures 4.18 et 4.19 montrent les modèles par éléments finis du problème avec des « Aspect Ratio » de 3 et 6 respectivement.

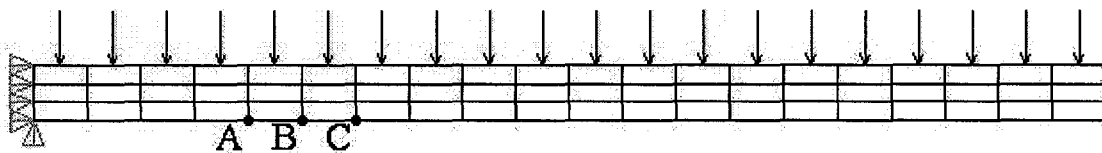


Figure 4.18 Modélisation du problème par éléments finis avec un « Aspect Ratio » de 3

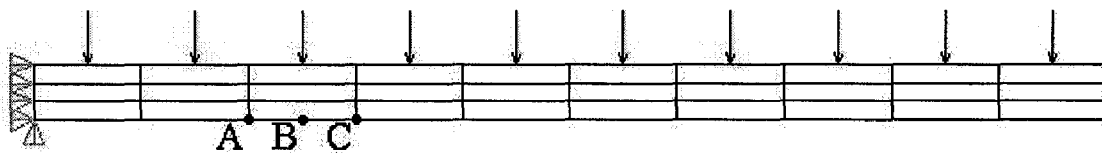


Figure 4.19 Modélisation du problème par éléments finis avec un « Aspect Ratio » de 6

Pour ce qui est de l'effet de distorsion dû aux angles, les éléments de départ ont un AR de 3 pour permettre un intervalle incluant les limites de Ansys® et un parallélisme minimum de 90° comme dans le maillage de Kwak [22-24]. La figure 4.20 montre la démarche suivie pour conclure qu'un AR de 3 est suffisant.

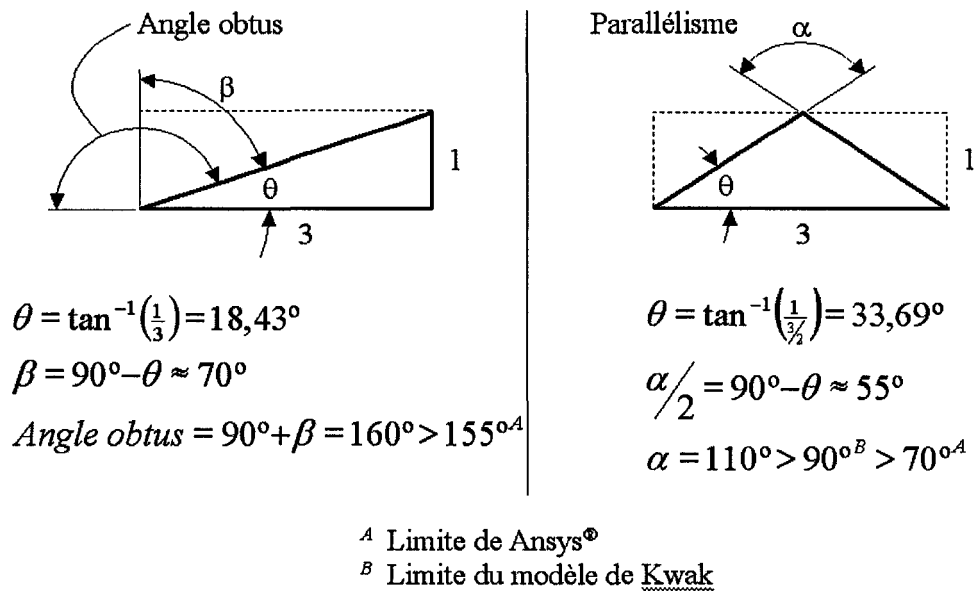


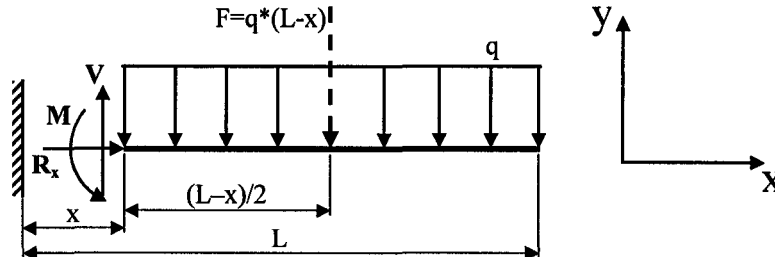
Figure 4.20 Présentation des angles maximums pour un « Aspect Ratio » de 3

#### 4.3.1.2 Calcul théorique de la contrainte normale en flexion

Comme la poutre est soumise à une charge uniformément répartie, la contrainte aux points A, B et C est une contrainte normale. Selon Bazergui [38], la contrainte en flexion développée en tous points le long d'une poutre encastree est :

$$\sigma = -\frac{My}{I} \quad (4.12)$$

Où  $M$  est le moment fléchissant due à la charge répartie  $q$  au point considéré à une distance  $a$  de l'encastrement, il est donné par l'équation 4.13 à l'aide du DCL de la poutre.



$$M = q * (L - x) * \frac{(L - x)}{2} = \frac{q * (L - x)^2}{2} \quad (4.13)$$

Puisque la charge répartie est vers le bas, elle crée un moment négatif, c'est-à-dire que les fibres supérieures au plan neutre sont en tension et les fibres inférieures de la poutre sont en compression.

Tous les points à calculer, A, B et C, sont situés sous l'axe neutre et à la fibre extérieure,  $y$  est donc égale à  $-h/2$ .

Le moment d'inertie d'une section rectangulaire est quant à lui donné par l'équation suivante :

$$I = \frac{bh^3}{12} \quad (4.14)$$

Avec  $b$  étant l'épaisseur de la poutre et  $h$  la hauteur.

Donc en reprenant l'équation 4.12, la contrainte normale en flexion d'une poutre encastree soumise à une charge uniformément répartie est égale à :

$$\sigma = \frac{3q(L-x)^2}{bh^2} \quad (\text{Compression}) \quad (4.15)$$

Alors, les valeurs théoriques des contraintes aux points concernés sont :

$$\sigma_A(x=120) = \frac{3 * 4 * (600-120)^2}{20 * 30^2} = 153,6 \text{ MPa} \quad (\text{Compression})$$

$$\sigma_B(x=150) = \frac{3 * 4 * (600-150)^2}{20 * 30^2} = 135 \text{ MPa} \quad (\text{Compression})$$

$$\sigma_C(x=180) = \frac{3 * 4 * (600-180)^2}{20 * 30^2} = 117,6 \text{ MPa} \quad (\text{Compression})$$

#### 4.3.1.3 Présentation des résultats et analyse

Tous les résultats numériques sont obtenus à l'aide du logiciel d'analyse par éléments finis : Ansys®. Le premier effet à être analysé est l'AR. Sur la figure 4.21, l'erreur relative n'excède pas les 6%, pour un AR dans l'intervalle de 0 à 15.

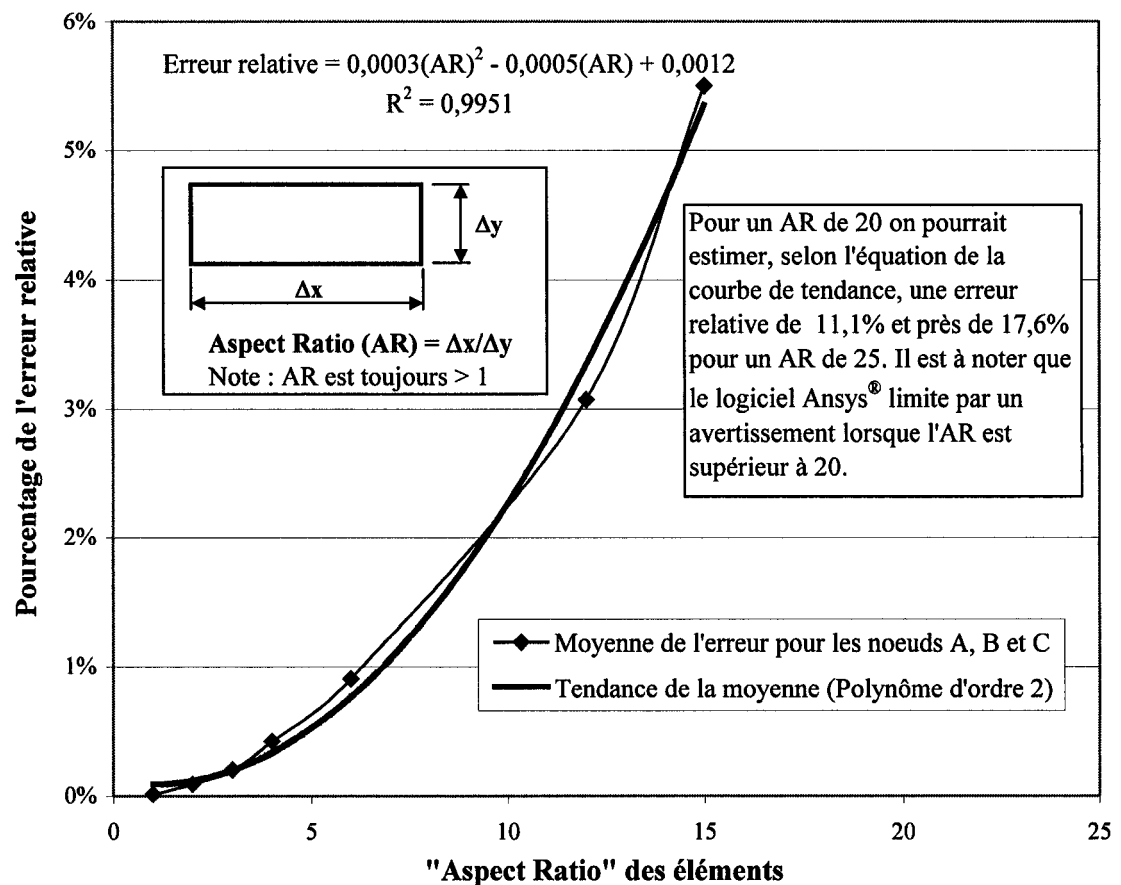


Figure 4.21 Erreur relative de la contrainte en flexion calculée par Ansys® par rapport à la théorie sous l'influence de l'AR

Une courbe de tendance, une polynomiale d'ordre 2 représentant avec un coefficient de détermination ( $R^2$ ) de 99,5% la courbe expérimentale, permet d'estimer une erreur relative de 11,1% pour un AR de 20. De plus, selon cette même équation, l'erreur



relative atteint un pourcentage de 17,6% pour un AR de 25. Selon Ansys® [37], la limite permise est un AR de 20.

Comme il est mentionné précédemment, l'AR sera de 3 pour le reste de l'étude. Selon la figure 4.21, l'erreur relative présente dans les éléments droits est inférieure à 0,2%, ce qui est négligeable. L'angle obtus est le deuxième effet de distorsion étudié. Le plus grand angle que peut avoir un élément à quatre nœuds sans message d'avertissement dans Ansys® [37] est de 155°. Lors des essais, sur la figure 4.22, c'est le nœud A qui se situe dans le coin où l'angle est le plus élevé qui est le plus influencé. Lorsque l'angle  $\beta$  vaut 65°, l'erreur relative par rapport à la théorie dépasse les 30%. Pour ce qui est des nœuds B et C, l'erreur relative pour un AR de 20 est en moyenne 5%.

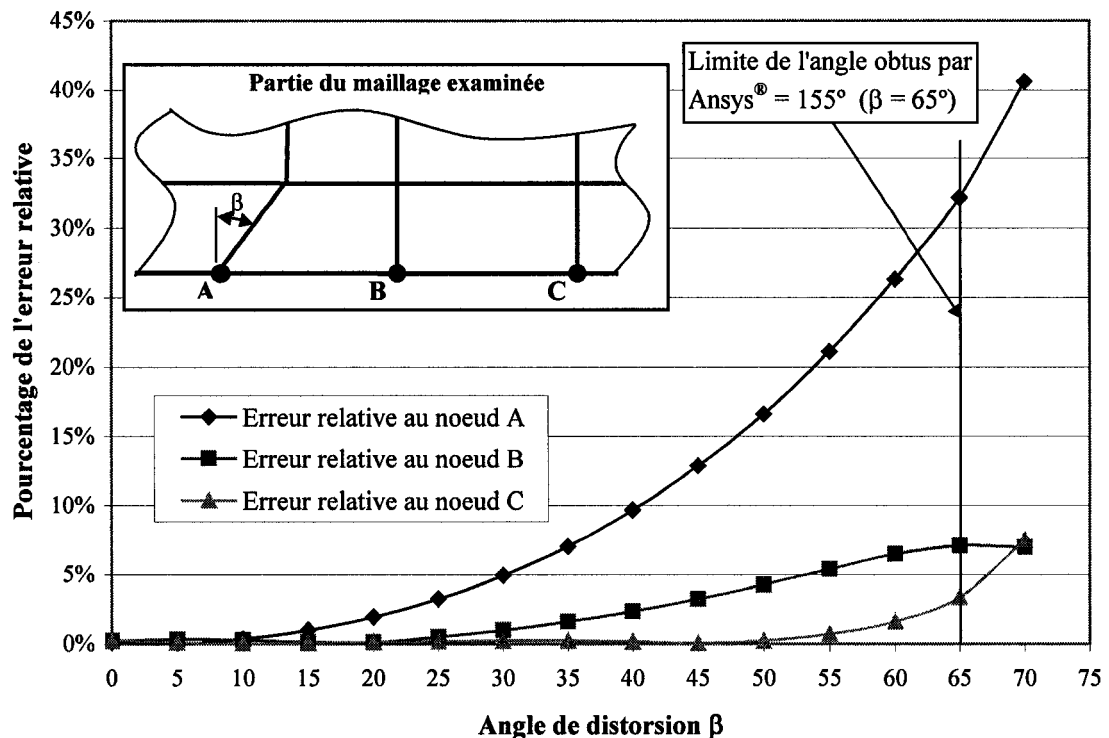


Figure 4.22 Erreur relative de la contrainte en flexion calculée par Ansys® par rapport à la théorie sous l'influence de l'angle obtus

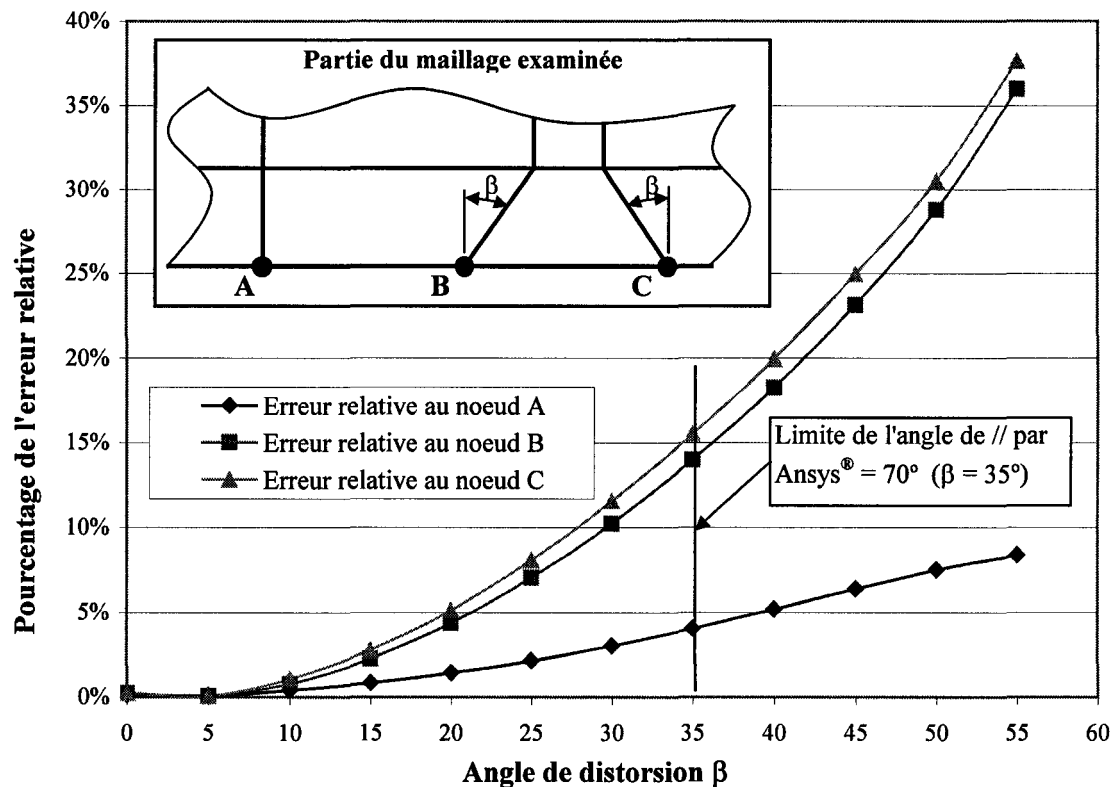


Figure 4.23 Erreur relative de la contrainte en flexion calculée par Ansys® par rapport à la théorie sous l'influence du parallélisme de deux cotés opposés

Pour ce qui est de l'effet dû au parallélisme, la figure 4.23 montre que les deux coins inférieurs de l'élément distordu, les nœuds B et C, sont les plus perturbés. L'erreur relative à ces deux nœuds environne les 15%, lorsque l'angle de parallélisme est égal à la limite d'avertissement imposée par le logiciel Ansys® [37], soit 70°. Tandis que pour le nœud A, la contrainte obtenue par le calcul des éléments finis diffère de moins de 5% par rapport à la contrainte théorique. Pour un angle de parallélisme perpendiculaire, où l'angle  $\beta$  est de 45°, comme le propose Kwak [22-24] dans son schéma de raffinement, l'erreur relative frôle les 25% pour les nœuds B et C.

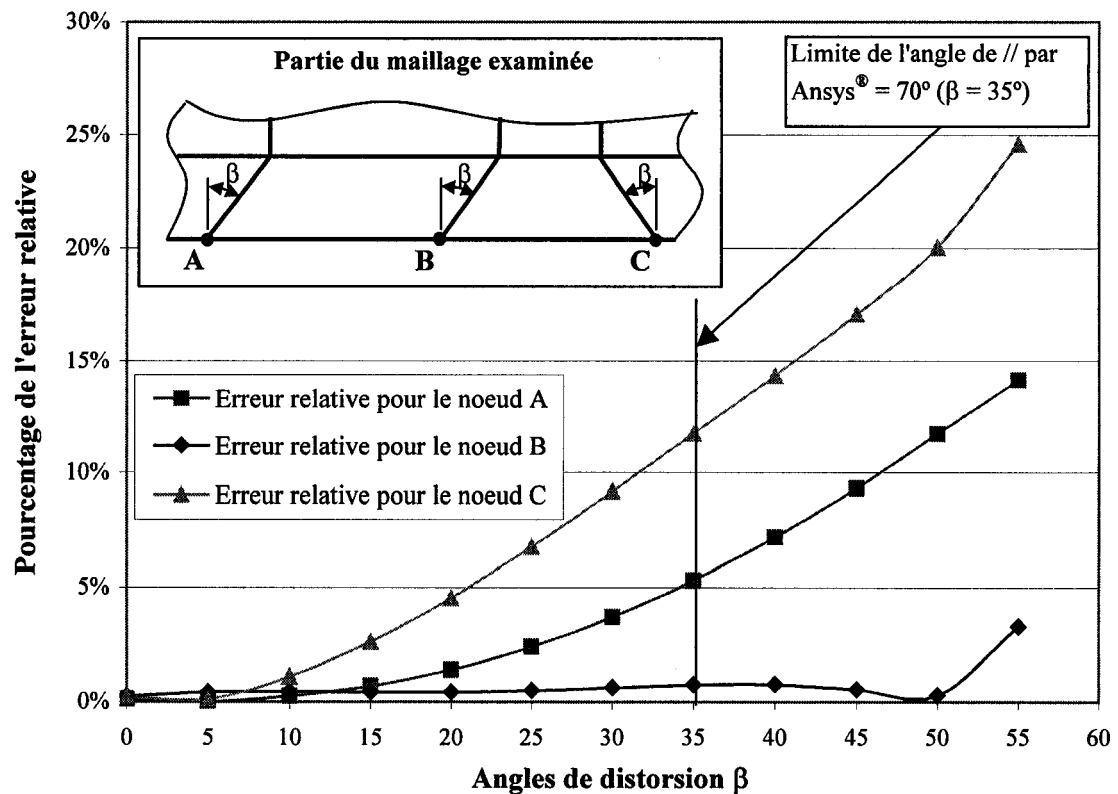


Figure 4.24 Erreur relative de la contrainte en flexion calculée par Ansys® par rapport à la théorie sous l'influence d'une combinaison de l'angle obtus et du parallélisme

En dernier lieu, comme aucun modèle de raffinement n'a qu'un seul élément distordu et qu'il est possible de rencontrer une combinaison des effets de distorsion, la figure 4.24 affiche les résultats du dernier test. Pour cet essai, l'angle  $\beta$  ne peut pas excéder 55°. En comparaison avec la limite d'avertissement de Ansys® [37] pour le parallélisme, le nœud C présente une erreur relative d'environ 12%. Les autres nœuds, avec un même angle  $\beta$ , ont une erreur relative inférieure ou égale à 5%.

Pour conclure cette étude, Ansys® semble tolérer une erreur relative d'environ 11% pour ce qui a trait à l'AR. Une distorsion causée par un grand angle obtus influe beaucoup les résultats. Selon la recherche, Ansys® accepte, localement à ce nœud, une erreur relative supérieure à 30%. La perturbation due à un angle obtus est atténuée lorsque les côtés de l'élément sont parallèles. Lorsqu'un élément a deux côtés opposés formant un angle de 70°, l'erreur relative est environ 15%, ce que Ansys® trouve acceptable. Pour une combinaison des effets de distorsion, un angle obtus et des côtés non parallèles, l'erreur relative est de 12% pour la limite permise de parallélisme pour Ansys® [37]. Finalement, comme l'étude d'un problème simple ne permet pas d'établir des limites précises et que le logiciel Ansys® est plus expérimenté dans le domaine, les limites d'avertissement de Ansys® [37] seront les balises pour qualifier les schémas de raffinement.

### 4.3.2 Amélioration du modèle elliptique

Suite aux résultats obtenus de l'étude de distorsion, le schéma elliptique de raffinement de maillage doit être modifié. Lors de la modification, deux critères doivent être respectés : répondre aux exigences du logiciel Ansys® et conserver le même nombre de rayons pour les ellipses, soit cinq. La méthode qui est utilisée, est le déplacement manuel de certains nœuds. La figure 4.25 précise les modifications effectuées. L'angle  $\theta_1$  représente le  $45^\circ$ ,  $\theta_3$  sert pour les éléments 17, 20, 23 et 26 et  $\theta_2$  est utilisé sur les éléments 1 à 4 ainsi que sur le dernier cercle.

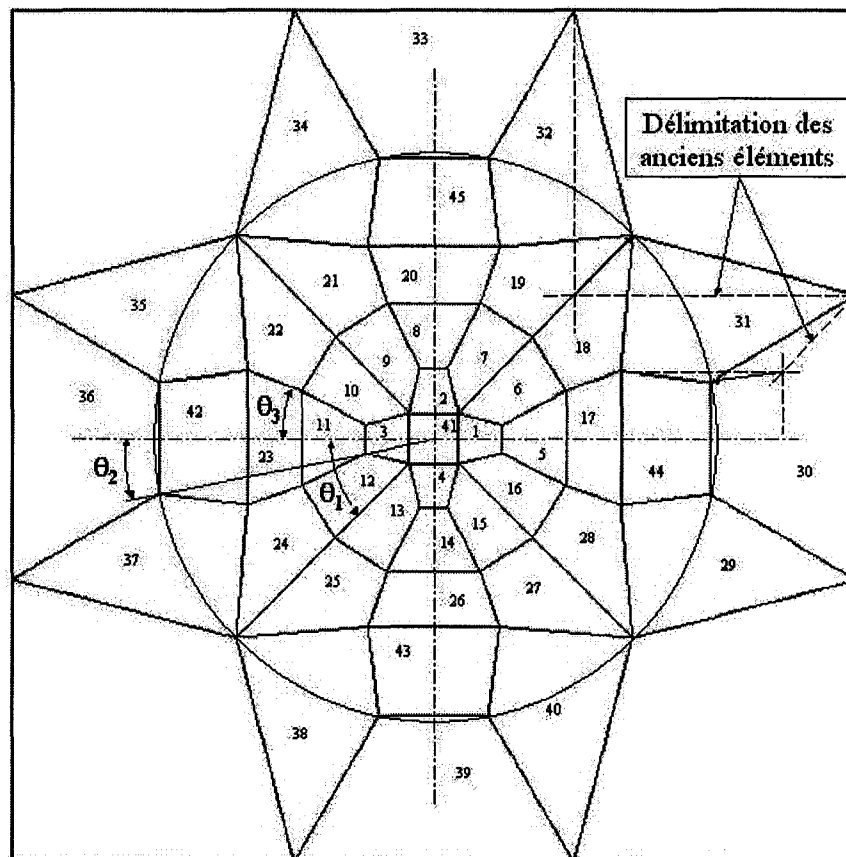


Figure 4.25 Illustration des modifications pour répondre aux exigences de maillage de Ansys®

Ce modèle va donc servir de point de départ à l'optimisation du schéma elliptique. En plus de respecter un « Aspect Ratio » inférieur à 20, un angle obtus plus petit que  $155^\circ$  et l'angle de parallélisme maximum de  $70^\circ$ , le rapport de surface entre les éléments doit augmenter graduellement du centre jusqu'à l'extérieur et l'écart entre les angles intérieurs d'un élément doit être minimal.

#### 4.3.2.1 Calcul de l' « Aspect Ratio » (AR) d'un élément à quatre nœuds

Il existe plusieurs méthodes pour calculer l'AR comme l'écrit Diekmann [39]. Les quatre façons sont montrées à la figure 4.26. Puisque les éléments ne sont pas toujours, même rarement, droits, Ansys® a aussi développé une méthode [37]. C'est cette dernière qui est utilisée ici parce que les critères qualitatifs du maillage sont établis à l'aide de ce logiciel.

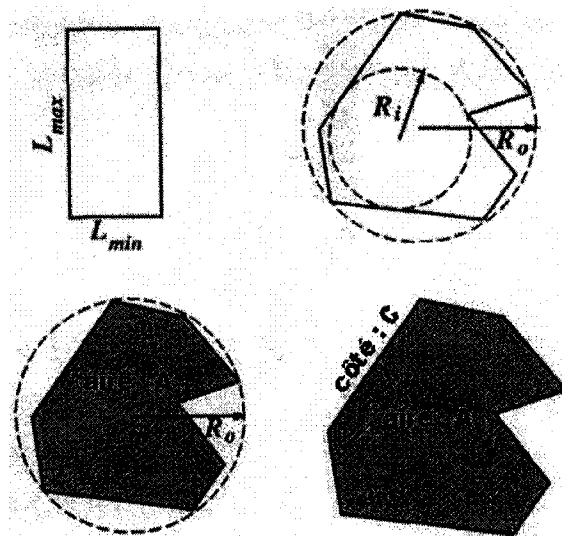


Figure 4.26 Différentes définitions de l' « Aspect Ratio »

$$AR : \frac{L_{\max}}{L_{\min}}, \frac{R_o^2}{R_i^2}, \frac{R_o^2}{A} \text{ et } \frac{C^2}{16A}^1$$

<sup>1</sup> Tiré et adapté de Diekmann [33]

Pour commencer, les lignes bissectrices sont tracées pour les deux paires de côtés opposés, lesquelles se croisent au centre de l'élément. En général, ces lignes ne sont pas perpendiculaires. Alors deux rectangles passant par les quatre points intermédiaires sont construits. La figure 4.27 illustre la méthode. C'est l'AR du rectangle le plus étiré qui est retenu. Il est à noter que l'AR doit toujours être supérieur à 1.

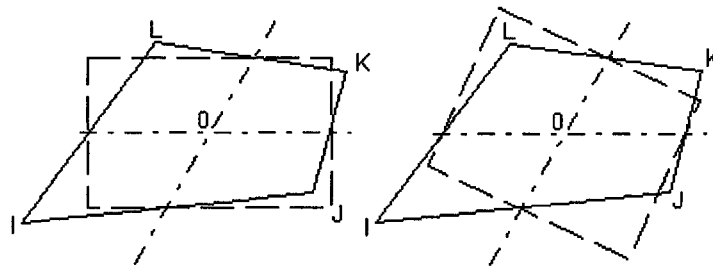
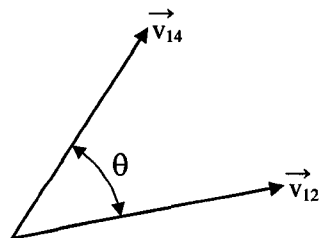


Figure 4.27 Illustration d'un élément à quatre nœuds pour le calcul de l'AR<sup>1</sup>

#### 4.3.2.2 Calcul des angles intérieurs d'un élément à quatre nœuds

Pour minimiser l'écart entre les angles intérieurs en plus de répondre au critère de l'angle obtus, tous les angles doivent être calculés. C'est lors de cette même étape qu'est calculé l'angle de parallélisme pour deux côtés opposés. Tous les angles sont calculés à l'aide du produit scalaire puisque selon Swokowski [32] :

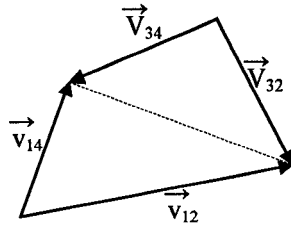


$$\cos \theta = \frac{\vec{v}_{12} \cdot \vec{v}_{14}}{\|\vec{v}_{12}\| \|\vec{v}_{14}\|} \quad (4.15)$$

<sup>1</sup> Tiré et adapté de Ansys® [31]

#### 4.3.2.3 Calcul de l'aire d'un élément à quatre nœuds

Afin de pouvoir établir un rapport de surface entre les éléments du centre vers l'extérieur du schéma elliptique, l'aire de chaque élément doit être calculée. L'aire d'un triangle peut être calculée à l'aide du produit vectoriel comme l'explique Swokowski [32]. Comme tout quadrilatère est composé de deux triangles, l'équation de l'aire d'un élément à quatre nœuds s'écrit :



$$A = \frac{1}{2} \|\vec{v}_{12} \times \vec{v}_{14}\| + \frac{1}{2} \|\vec{v}_{32} \times \vec{v}_{34}\| \quad (4.16)$$

#### 4.3.2.4 Résultats de l'amélioration

Comme il est mentionné au début de cette section, les nœuds du modèle doivent demeurer sur cinq rayons. En plus, la position angulaire des nœuds doit varier le moins possible. C'est-à-dire de ne pas ajouter de nouveaux angles puisqu'il y a deux nœuds, minimum, à chaque angle. Finalement, le rapport entre les surfaces des éléments doit augmenter graduellement.



Le point de départ est que le plus petit rayon reste à 0,25 unités, ce qui crée un raffinement de 1/32. Par la suite, l'ajustement du deuxième rayon à l'aide d'une boucle itérative à deux variables : une pour la valeur du rayon et l'autre pour l'angle. Pour le rayon les valeurs vont de 0,30 à 0,75 par pas de 0,05 unités. Et pour les angles, elles varient de 5° à 17° avec un pas de 1°. Un tableau de statistiques est attribué à chaque changement de rayon. Le tableau 4.II montre l'allure des données recueillies lors de l'optimisation du deuxième rayon.

Tableau II

Tableau des statistiques recueillies lors de  
l'optimisation du deuxième rayon

Rayon (unités)	Angles	Nombre de « Bad Shape Elements »	Rapport des surfaces 1 et 41	Nombre d'éléments excédant un écart-type d'angle interne de 50°
0,60	5°	4	1,2963	0
0,60	6°	4	1,2429	0
0,60	7°	4	1,1945	0
0,60	8°	4	1,1506	0
0,60	9°	0	1,1107	0
0,60	10°	0	1,0743	0
0,60	11°	0	1,0412	0
0,60	12°	0	1,0108	0
0,60	13°	0	0,9831	0
0,60	14°	0	0,9578	0
0,60	15°	0	0,9346	0
0,60	16°	0	0,9134	0
0,60	17°	8	0,8940	0

Pour les cinq éléments au centre du schéma, le rapport de surface doit être le plus près de 1. C'est alors avec un rayon de 0,60 unités et un angle  $\theta_2$  de 12° que cela est possible. En plus, le tableau 4.II révèle que pour ces données, il n'y a pas de « Bad Shape Elements » et que l'écart entre les angles internes est inférieur à 50°. C'est donc à partir de ces nouvelles valeurs que le troisième rayon et l'angle  $\theta_3$  seront déterminés.

Pour le troisième rayon, les rapports de surfaces entre les éléments 1 et 5 et les éléments 1 et 6 doivent se situer dans un intervalle de 1 à 2 pour une augmentation graduelle de la taille des éléments. Évidemment, aucun « Bad Shape Element » n'est accepté, pas plus qu'un écart-type supérieur à 50°, entre les angles internes d'un élément. Cette fois-ci, le rayon varie de 0,75 à 1,25 unités avec un incrément de 0,05 unités et l'angle s'échelonne de 13° à 25°. Le tableau 4.III montre les résultats obtenus lors des essais. Pour répondre à toutes ces exigences, on remarque que le rayon doit être de 1,05 unités et l'angle  $\theta_3$  doit être de 19°. Il faut aussi constater que les valeurs choisies sont centrées par rapport aux autres cas où il y a des « Bad Shape Elements ». Le rayon et l'angle trouvés à cette étape serviront à déterminer les valeurs optimales pour le quatrième rayon.

Tableau III

Tableau des statistiques recueillies lors de  
l'optimisation du troisième rayon

Rayon (unités)	Angles	Nombre de « Bad Shape Elements »	Rapport des surfaces 1 et 5	Rapport des surfaces 1 et 6	Nombre d'éléments excédant un écart- type d'angle interne de 50°
1,05	13°	12	1,2732	2,0764	0
1,05	14°	8	1,3230	2,0545	0
1,05	15°	0	1,3702	2,0319	0
1,05	16°	0	1,4149	2,0086	0
1,05	17°	0	1,4567	1,9845	0
1,05	18°	0	1,4957	1,9598	0
<b>1,05</b>	<b>19°</b>	<b>0</b>	<b>1,5316</b>	<b>1,9343</b>	<b>0</b>
1,05	20°	0	1,5643	1,9082	0
1,05	21°	0	1,5938	1,8813	0
1,05	22°	0	1,6199	1,8538	0
1,05	23°	4	1,6425	1,8257	0
1,05	24°	4	1,6615	1,7968	0
1,05	25°	4	1,6768	1,7674	0

Pour ce qui est de l'avant dernier rayon, le quatrième, le rapport de surface entre les éléments 5 et 17 doit être compris entre 1 et 2. De plus, les valeurs retenues doivent combler parfaitement les critères d'analyse en plus d'être symétriques par rapport aux données où il y a présence de non-conformités. Les intervalles de comparaison s'étendent de 1,10 à 1,75 unités pour le rayon et de 13° à 25° pour l'angle. Le rayon retenu vaut 1,50 unités selon le tableau 4.IV et l'angle de positionnement répond à l'exigence de conserver la même valeur que  $\theta_3$ , soit 19°. Les dernières valeurs trouvées permettront d'identifier les valeurs optimales pour le cinquième rayon.

Tableau IV

Tableau des statistiques recueillies lors de  
l'optimisation du quatrième rayon

Rayon (unités)	Angles	Nombre de « Bad Shape Elements »	Rapport des surfaces 5 et 17	Nombre d'éléments excédant un écart-type d'angle interne de 50°
1,50	13°	8	1,6812	0
1,50	14°	0	1,7215	0
1,50	15°	0	1,7582	0
1,50	16°	0	1,7910	0
1,50	17°	0	1,8199	0
1,50	18°	0	1,8446	0
<b>1,50</b>	<b>19°</b>	<b>0</b>	<b>1,8651</b>	<b>0</b>
1,50	20°	0	1,8811	0
1,50	21°	0	1,8925	0
1,50	22°	0	1,8991	0
1,50	23°	0	1,9008	0
1,50	24°	4	1,8976	0
1,50	25°	4	1,8891	0

Dans le cas du dernier rayon à déterminer, les rapports de surface se font entre les éléments 17 et 18 et les éléments 17 et 44. Les valeurs des rapports entre les surfaces doivent être entre 1 et 2. Aucune tolérance n'est permise pour les essais contenant des « Bad Shape Elements » ou un écart entre les angles internes trop élevé. Cette fois-ci, le rayon varie de 1,75 à 2,25 unités, tandis que le rayon va de 5° à 10°. Les données présentées dans le tableau 4.V, confirment que le cinquième rayon est de 1,95 unités et l'angle prend la valeur de 11°. Malheureusement, dans ce cas l'angle  $\theta_2$  ne peut pas être récupéré.

Tableau V

Tableau des statistiques recueillies lors de  
l'optimisation du cinquième rayon

Rayon (unités)	Angles	Nombre de « Bad Shape Elements »	Rapport des surfaces 17 et 18	Rapport des surfaces 17 et 44	Nombre d'éléments excédant un écart- type d'angle interne de 50°
1,95	5°	4	1,1309	0,9771	0
1,95	6°	4	1,1309	1,0210	0
1,95	7°	4	1,1309	1,0630	0
1,95	8°	0	1,1309	1,1028	0
1,95	9°	0	1,1309	1,1404	0
1,95	10°	0	1,1309	1,1755	0
1,95	11°	0	1,1309	1,2079	0
1,95	12°	0	1,1309	1,2376	0
1,95	13°	0	1,1309	1,2643	0
1,95	14°	0	1,1309	1,2878	0
1,95	15°	8	1,1309	1,3080	8
1,95	16°	8	1,1309	1,3248	8
1,95	17°	8	1,1309	1,3380	8

En résumé, l'élément du centre est inscrit à l'intérieur d'un cercle de 0,25 unités de rayon et les nœuds sont à 45°. Le deuxième cercle a un rayon de 0,60 unités et les nœuds sont à une position angulaire de plus ou moins 12° par rapport aux axes horizontal et vertical. Pour les éléments 5 à 16, le cercle a un rayon de 1,05 unités et il y a quatre nœuds positionnés à 45°, puis les autres sont de chaque côté des axes droits formant un angle de 19°. Le cercle circonscrit aux douze éléments suivants mesure 1,50 unités de

rayon. Les nœuds sont répartis de part et d'autre des axes avec un angle de  $19^\circ$ . Le dernier cercle a un rayon de 1,95 unités. Quatre nœuds sont placés à  $45^\circ$  et les huit autres jonchent les axes de référence avec un angle de  $11^\circ$ . Le modèle elliptique optimisé dans un système de référence unitaire est illustré à la figure 4.28.

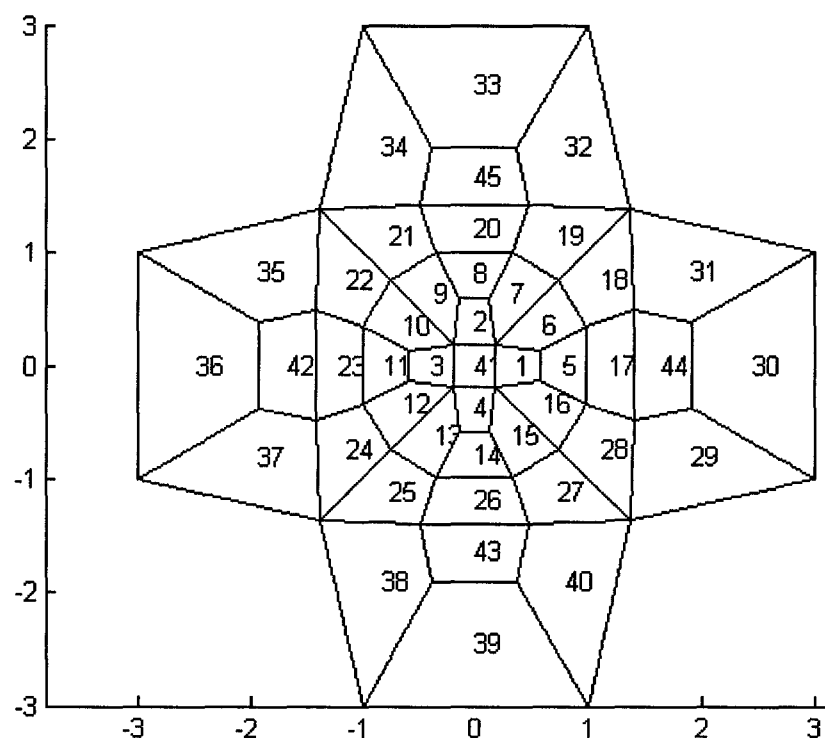


Figure 4.28 Illustration du schéma elliptique optimisé dans un système de coordonnées unitaire

### 4.3.3 Modification pour l'adaptation sur la frontière

Puisque les quatre nœuds de l'élément de départ ont dû être légèrement déplacés pour éviter les « Bad Shape Elements », comme le montre la figure 4.25, le schéma de raffinement doit subir d'autres modifications. Les changements doivent tenir compte de trois critères : tous les éléments demeurent des quadrilatères, les éléments sur la frontière sont plus petits car souvent les contraintes critiques s'y retrouvent et puisque les cercles sont concentriques pour les autres nœuds, les ellipses le sont pour les nœuds à modifier. Une première ébauche est faite à l'aide de la méthode de déplacement des nœuds dans Ansys®. Cette étape permet de visualiser le maillage en plus de vérifier qu'il est conforme aux normes de qualification. Par la suite, de façon plus automatique, les nouvelles coordonnées des nœuds sont créées pour respecter la concentricité des ellipses. La figure 4.29 montre les étapes suivies ainsi que les nœuds servant de référence.

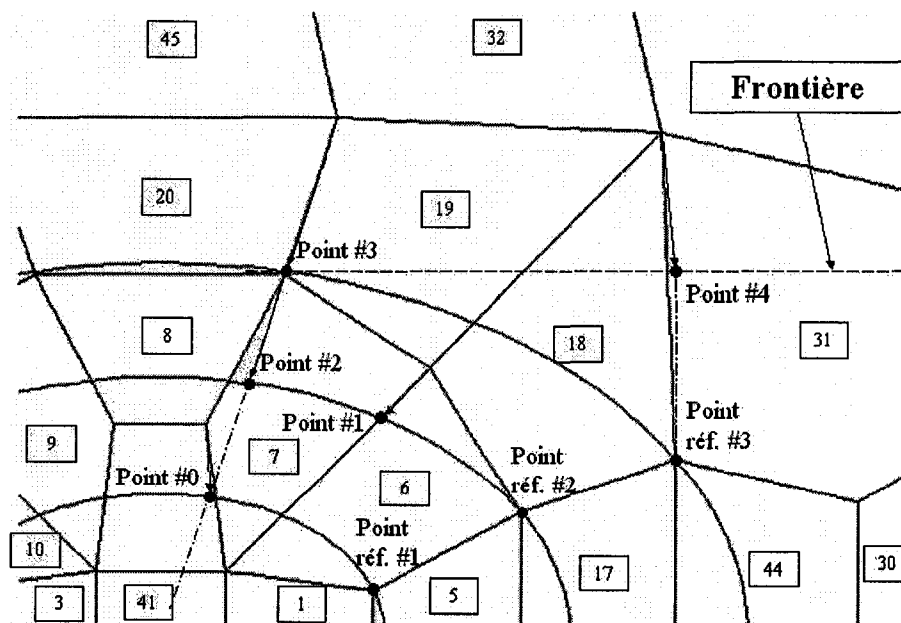


Figure 4.29 Modification du modèle elliptique pour adaptation aux éléments sur les frontières

Lors du positionnement automatique, le point 4 est le premier à être positionné. Sa coordonnée horizontale est la même que celle du point de référence 3 et sa coordonnée verticale est 1 puisqu'il est à la limite de l'élément, c'est-à-dire sur la frontière. Il en est de même pour la coordonnée verticale du point 3. Pour la coordonnée horizontale de ce point, il est à la même distance que le point de référence 2 de l'axe horizontal. On peut remarquer sur la figure 4.29 l'effet de superposition avec l'ancienne position du point 2. Les points 0 et 2 sont alignés avec le point 3 en fonction de leur position angulaire. Le point 1 quant à lui est demeuré sur un axe à  $45^\circ$ . On peut aussi constater que les points 0, 1, 2 et 3 sont sur trois ellipses concentriques. Un exemple de raffinement sur la frontière est présenté à la figure 4.30. Un processus d'amélioration similaire à celui du modèle de base serait nécessaire pour réduire le nombre d'éléments à risques.

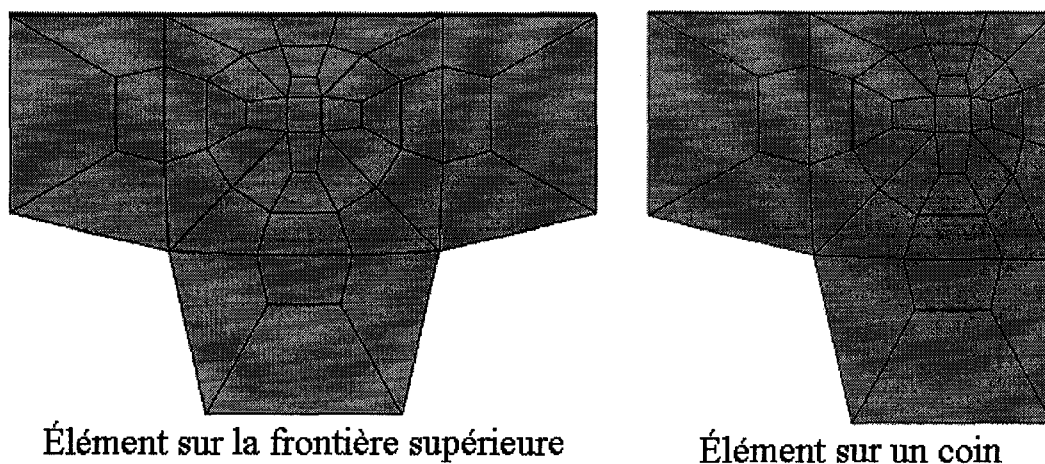


Figure 4.30 Visualisation du schéma elliptique appliqué sur les frontières

#### 4.3.4 Incorporation du modèle elliptique dans le maillage grossier

Présentement, tous les nouveaux nœuds ont une coordonnée par rapport au système de référence unitaire  $r$ - $s$ . Il faut donc l'implanter dans le maillage en tenant compte de l'allure des éléments à raffiner, c'est-à-dire l'élément sélectionné et son entourage. Pour la première étape de cette section, les éléments adjacents ayant une arête en commun avec l'élément, doivent être classés de façon à savoir leur position par rapport à l'élément ciblé. Les éléments adjacents n'ayant qu'un nœud en commun avec l'élément en question servent seulement à déterminer un point d'interpolation pour l'incorporation des nouveaux sommets de l'ancien élément cible. La sélection du point d'interpolation constitue la deuxième étape de cette section. La troisième étape est d'interpoler tous les nouveaux nœuds, du modèle de raffinement pour obtenir leur coordonnée dans le domaine  $X$ - $Y$  du maillage de départ. La connectivité pour les nouveaux éléments est incluse en guise de quatrième et dernière étape de cette section.



#### 4.3.4.1 Classement des éléments adjacents avec deux nœuds communs

Les éléments adjacents ayant deux nœuds en commun avec l'élément visé sont classés de façon à retrouver un certain ordre. Le premier élément dans le vecteur de référence est celui ayant conjointement les nœuds 1 et 2 de l'élément cible. La figure 4.31 illustre bien l'idée et l'ordre de ce classement.

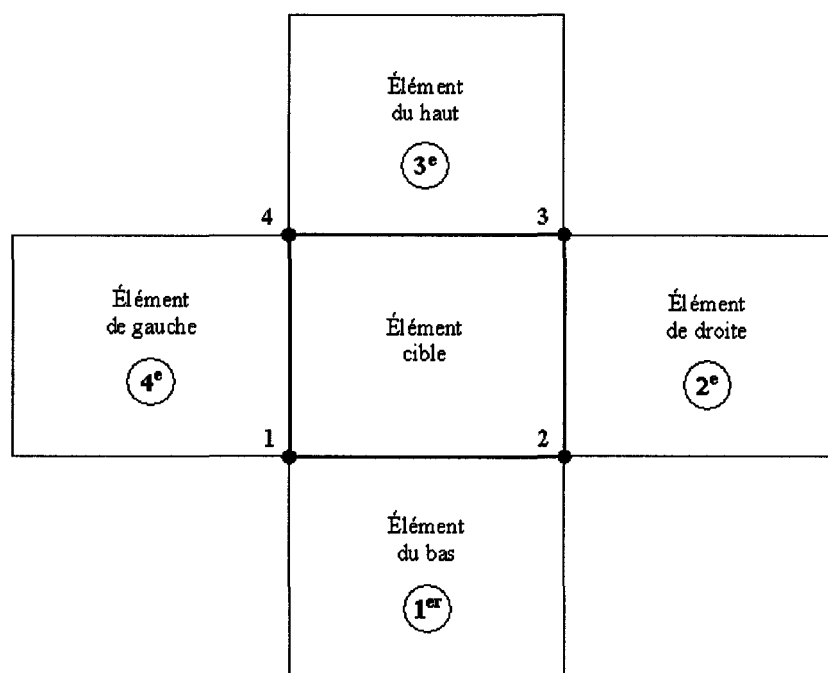


Figure 4.31 Arrangement des éléments adjacents ayant deux nœuds en commun avec l'élément cible

Pour poursuivre l'exemple de la sélection de l'élément 8, voir la figure 4.11, l'ordre des nœuds adjacents est : 7, 11, 9 et 5.

#### 4.3.4.2 Calcul des coordonnées des points pour l'interpolation à 9 nœuds

Les éléments adjacents situés dans les coins de l'élément ciblé ne servent qu'à déterminer les coordonnées d'un point pour l'interpolation de quatre nouveaux sommets car aucun élément directement adjacent n'inclue les anciens sommets de l'élément visé. Puisque les nœuds sont déplacés vers le coin extérieur de l'élément ciblé. La figure 4.25 montre le déplacement manuel de ce nœud entre les éléments 18 et 19. En plus, le nombre d'éléments entourant l'élément sélectionné peut être différent d'un cas à un autre, voir la figure 4.32. C'est pour ces raisons que les coordonnées réelles des nœuds remplaçant les anciens sommets de l'élément ciblé seront le résultat d'une interpolation à 9 points. Pour chaque sommet, une nouvelle coordonnée est associée. La figure 4.32 affiche les nouveaux nœuds à l'aide d'une étoile pour différents cas possibles.

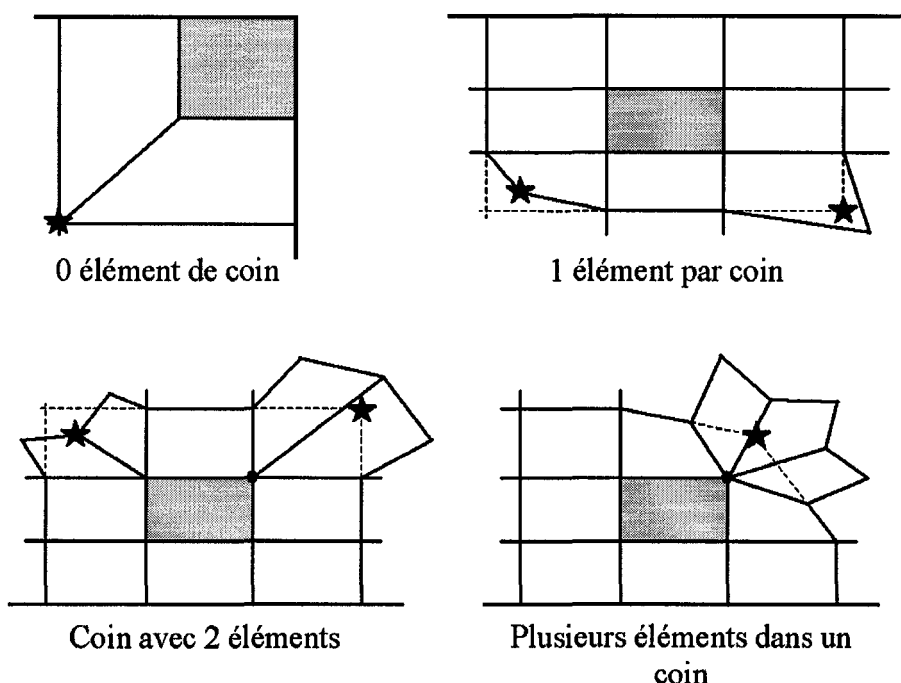


Figure 4.32 Diverses possibilités pour le calcul des nouveaux nœuds pour l'interpolation des nœuds de coins

Pour l'exemple où il n'y a pas d'élément dans un coin de l'élément choisi, aucune nouvelle coordonnée n'est nécessaire. C'est le cas lorsqu'il y a trois éléments autour d'un même nœud. Dans cette circonstance, le point pour l'interpolation est le nœud commun aux deux éléments adjacents. Dans toutes les autres éventualités, la nouvelle coordonnée est créée soit par l'intersection du prolongement des côtés des éléments directement adjacents, soit avec le nœud bissecteur des éléments touchant au coin de l'élément choisi. La figure 4.32 identifie par un cercle le nœud en question dans le cas de plusieurs éléments dans un coin. La coordonnée servant à l'interpolation est en fait le point le plus près du nœud de l'élément de centre. Elle est identifiée par une étoile dans l'illustration. Le point le plus rapproché est utilisé afin d'éviter que l'interpolation déborde à l'extérieur des éléments adjacents.

#### 4.3.4.3 Interpolation et rattachement des nouveaux éléments

Pour transformer les coordonnées du système unitaire de référence en coordonnées réelles et cartésiennes, des fonctions d'interpolation sont utilisées. Pour bien voir ce qui arrive, les nœuds du schéma elliptique sont superposés aux éléments de la figure 4.31. La figure 4.33 affiche la superposition. Les numéros de nœuds sont à l'envers puisque le schéma elliptique est développé dans le premier quadrant du système d'axes  $r$  et  $s$ . En plus, pour les équations des fonctions d'interpolation l'axe  $s$  passe entre les nœuds 1 et 2. La fonction d'interpolation pour la majorité des points est la même que celle utilisée lors de la sélection de l'élément. La fonction est bilinéaire, elle est rappelée ici, ainsi que l'équation de la transformation :

$$N4(r, s) = \begin{bmatrix} (1+r)(1+s) & (1-r)(1+s) & (1-r)(1-s) & (1+r)(1-s) \end{bmatrix} \quad (4.17)$$



19, 37 et 39. Pour les points 28, 30, 38 et 40 se sont ceux du troisième élément adjacent. Les coordonnées 7, 9, 27 et 29 sont interpolées à l'aide des nœuds de l'élément à gauche du centre. Pour chaque élément adjacent, la coordonnée de référence doit être transformée afin de correspondre à un système de référence unitaire au centre de l'élément d'interpolation. C'est-à-dire que pour l'interpolation à quatre nœuds, les coordonnées  $r$ - $s$  doivent se situer entre  $-1$  et  $1$ , tandis que le modèle elliptique a été développé entre  $-3$  et  $3$ , puisqu'il fait intervenir trois éléments dans chaque direction.

Les points 41 à 44 ne font pas partie ni de l'élément sélectionné, ni des éléments adjacents, ils doivent être interpolés d'une autre façon. La figure 4.34 illustre l'élément de référence ainsi que les éléments réels utilisés pour la construction de la fonction d'interpolation à neuf nœuds. La méthode pour générer les coordonnées de l'étoile est expliquée à la section précédente. Les autres points réels sont les sommets de l'élément choisi par l'utilisateur, en gris, et deux de ses éléments adjacents.

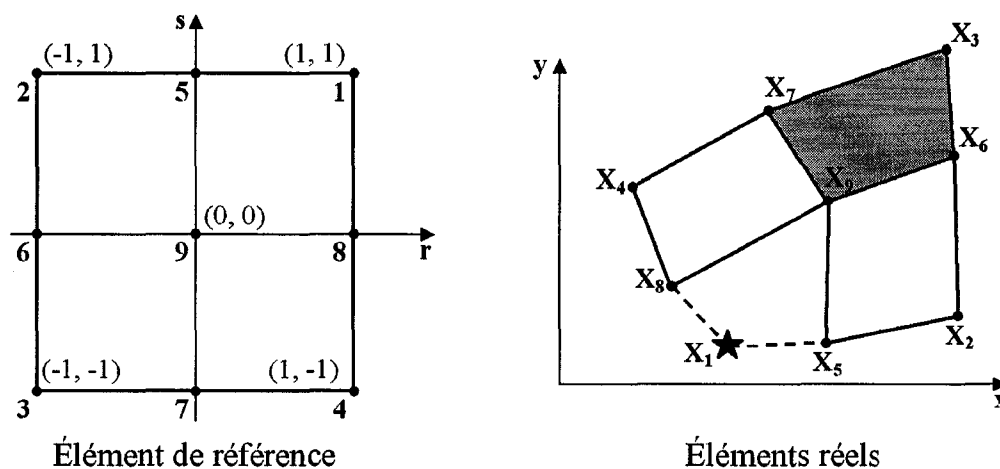


Figure 4.34 Illustration d'un élément à neuf nœuds pour la construction de la fonction d'interpolation

Selon Bathe [2], la fonction d'interpolation pour des éléments définis par quatre nœuds sur les sommets, quatre autres au milieu des arêtes et un au centre est biparabolique. L'équation est un polynôme incomplet d'ordre 4. L'équation de la fonction d'interpolation est décrite en 4.19 et l'équation de la transformation en 4.20.

$$N9(r, s) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} rs(r+1)(s+1) \\ rs(r-1)(s+1) \\ rs(r-1)(s-1) \\ rs(r+1)(s-1) \\ -2s(r-1)(r+1)(s+1) \\ -2r(r-1)(s-1)(s+1) \\ -2s(r-1)(r+1)(s-1) \\ -2r(r+1)(s-1)(s+1) \\ 4(r-1)(r+1)(s-1)(s+1) \end{bmatrix}^T \quad (4.19)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = N9(r, s) * \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

où  $r$  et  $s$  sont les coordonnées paramétriques de l'élément de référence,  $x$  et  $y$  sont les coordonnées dans le domaine réel correspondant à un point  $r$  et  $s$  et  $X_i$  et  $Y_i$  sont les coordonnées des neuf nœuds données par les élément réels.

Il est à noter qu'avant d'être interpolée, la coordonnée de référence doit subir une autre transformation. L'amélioration du schéma elliptique est faite sur une imitation de neuf éléments unitaires à quatre nœuds tandis que l'interpolation est faite sur un seul élément unitaire à neuf nœuds. La figure 4.35 montre l'allure de la zone de conception lors de l'optimisation et une plus petite zone identifiant l'élément de référence pour l'interpolation. Les coordonnées de l'étoile doivent subir une translation en  $r$  et en  $s$  pour recentrer l'origine du système de référence et une multiplication d'une demie, due au rétrécissement de la zone de référence par un facteur de 2.

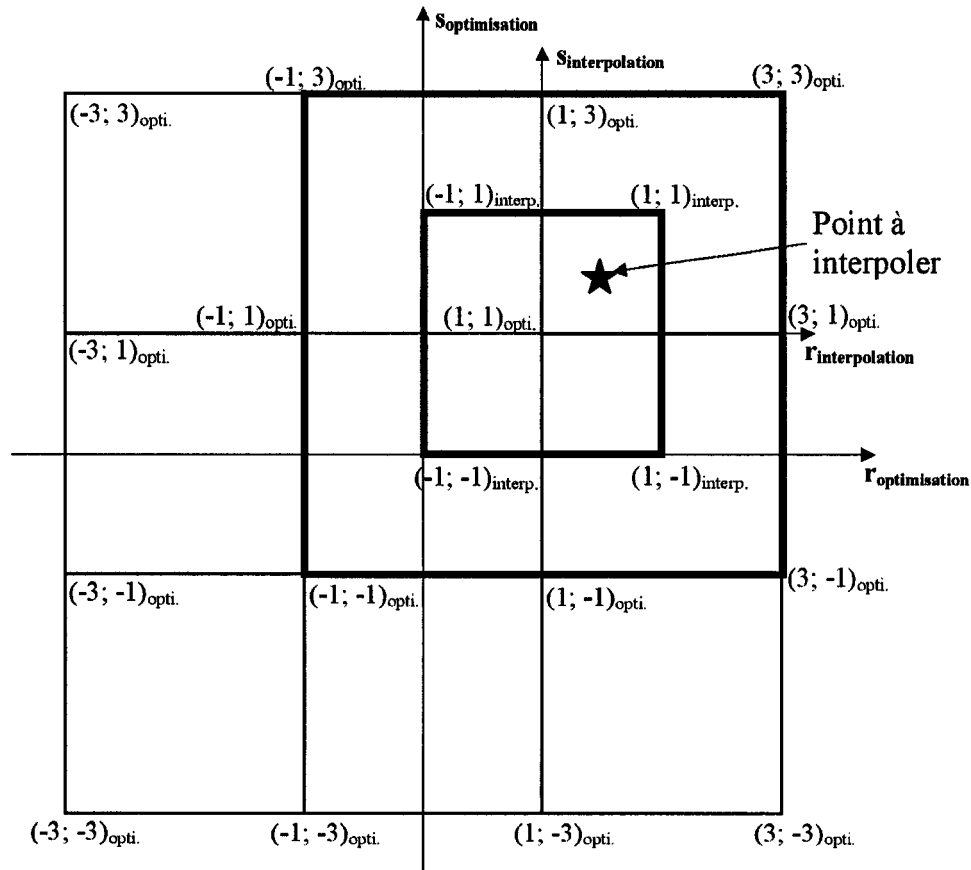


Figure 4.35 Schématisation de la zone d'optimisation et de la zone d'interpolation pour la transformation de la coordonnée à interpoler

À chaque transformation, un nouveau nœud est ajouté au maillage global et la matrice des connectivités pour les éléments du schéma elliptique est mise à jour avec le nouveau numéro de nœud. Une fois tous les nœuds transformés, les nouveaux éléments sont additionnés à la matrice globale des connectivités en tenant compte des nœuds n'étant pas modifiés. Dans l'exemple du raffinement de l'élément 8, la figure 4.36 montre le maillage obtenu.

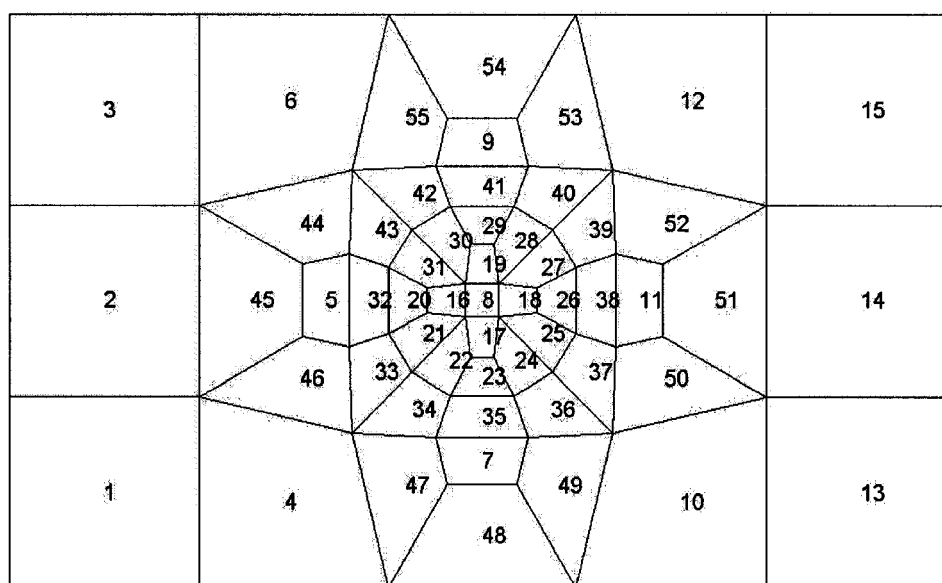


Figure 4.36 Illustration du raffinement de l'élément 8 du maillage grossier



## **CHAPITRE 5**

### **COMPARAISON DES MAILLEURS ET APPLICATIONS**

#### **5.1 Introduction**

Dans le présent chapitre, l'objectif est de valider le modèle développé précédemment. Il est facile d'utiliser un mailleur, un schéma de raffinement, mais le modèle donne-t-il de bons résultats. C'est pourquoi cette section renferme une comparaison critique entre quelques méthodes existantes et des simulations numériques. Un mailleur commercial, en l'occurrence Ansys<sup>®</sup>, un schéma de raffinement basé sur une décomposition « octree » et le modèle elliptique développé lors de cette recherche sont comparés. L'analyse étudie plusieurs critères spécifiques comme le nombre de « Bad Shape Elements » créés, le rapport de raffinement et le nombre d'éléments modifiés. Pour les simulations, des cas typiques d'analyse structurale sont abordés. La contrainte, calculée de façon théorique, sert de valeur de comparaison dans tous les cas.

## 5.2 Comparaison du modèle elliptique avec les autres schémas

En guise de comparaison, les différents maillages utilisant les algorithmes d'Ansys<sup>®</sup>, de Kwak [22-24] et du schéma de raffinement elliptique sont rappelés respectivement aux figures 5.1, 5.2, 5.3 et 5.4. Les éléments plus foncés violent les limites permises de distorsion.

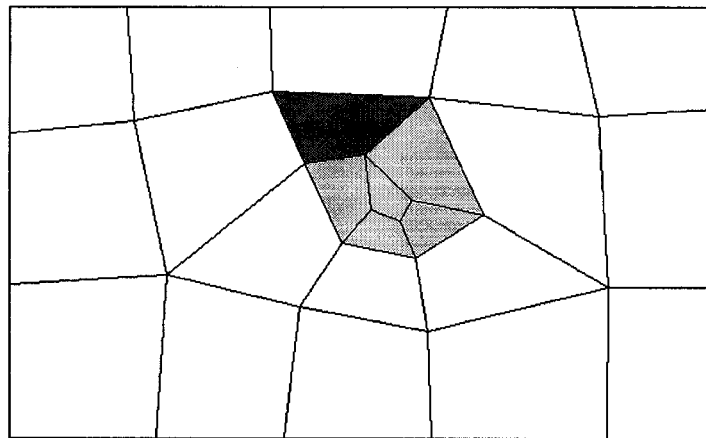


Figure 5.1 Maillage raffiné localement par l'algorithme de Ansys<sup>®</sup> avec un faible niveau de raffinement

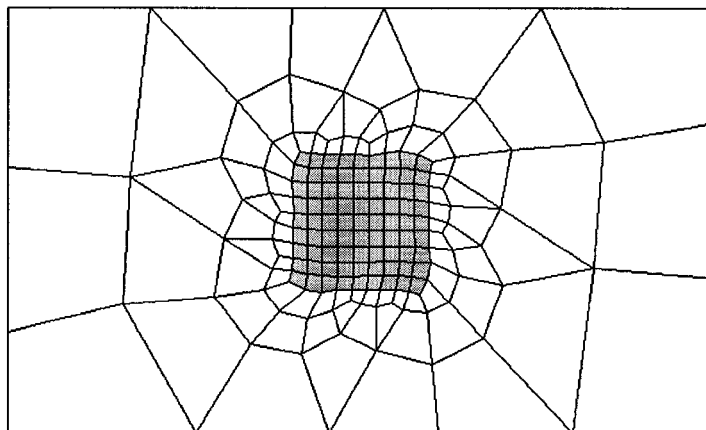


Figure 5.2 Maillage raffiné localement par l'algorithme de Ansys<sup>®</sup> avec un niveau de raffinement élevé

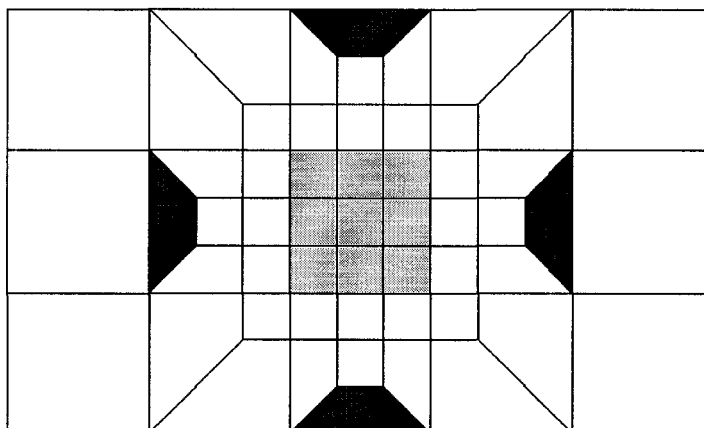


Figure 5.3 Maillage raffiné par la méthode utilisé par Kwak [22-24] et par Ansys® dans certaines conditions

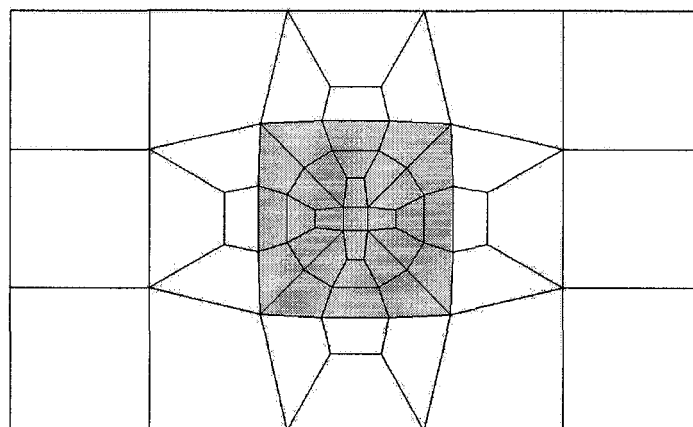


Figure 5.4 Maillage raffiné à l'aide du schéma elliptique

Tous les modèles de départ comptent quinze éléments égaux, donc un maillage structuré. Les éléments lors de cette première comparaison ont un « Aspect Ratio » de 1 et l'élément au centre du maillage initial est raffiné. Les critères de comparaison sont le nombre total d'éléments dans le maillage final, le nombre de « Bad Shape Elements », le rapport de raffinement, le nombre d'éléments du maillage initial qui sont modifiés et la possibilité d'un remaillage. Le tableau 5.I résume les résultats obtenus pour les cinq critères de comparaison pour chacun des modèles de raffinement de maillage.

Tableau VI

Tableau de comparaison des modèles  
de raffinement de maillage

<b>Modèle</b> <b>Critères</b>	<b>Anslys®</b> <b>faible raff.</b>	<b>Anslys®</b> <b>raff. élevé</b>	<b>Kwak [22-24]</b>	<b>Schéma</b> <b>elliptique</b>
Nombre d'éléments au total	23	167	55	55
Nombre de « Bad Shape Elements »	1	0	4	0
Rapport de raffinement	$\approx 1/10$	$\approx 1/80$	1/9	1/32
Nombre d'éléments modifiés	Tous les éléments du maillage grossier	Tous les éléments du maillage grossier	9	5 + 4 éléments modifiés légèrement
Capacité de remaillage	Oui, sans aucun problème	Oui, sans aucun problème	Oui, sous certaines conditions	Oui, sans aucun problème

En regardant les résultats présentés dans ce tableau, le choix le plus évident semble le schéma elliptique. Le modèle elliptique offre le meilleur rapport de raffinement considérant le nombre d'éléments au total dans le maillage final. Donc une bonne précision est obtenue à l'égard des temps de calcul. Le schéma elliptique permet aussi de conserver un maillage sans « Bad Shape Element ». De plus, le raffinement de maillage

est très localisé à la zone ciblée par l'analyste, car seulement cinq éléments sont totalement modifiés comparativement à neuf éléments pour le plus proche rival et à tous les éléments pour les maillages de Ansys®. Les éléments du schéma elliptique peuvent être raffinés bien que le maillage ne soit plus structuré. Cependant, les éléments générés peuvent comporter des distorsions au-delà des limites acceptables, comme c'est le cas pour toutes les autres méthodes de raffinement. Qui plus est, le modèle proposé par Kwak [22-24] offre quatre mauvais éléments dès le départ, en plus d'obliger une zone d'application structurée.

Pour clore les comparaisons, les quatre types de raffinement sont analysés sous l'effet d'un maillage de départ avec un « Aspect Ratio » différent. Deux zones de raffinement sont étudiées : un élément interne et un élément sur une frontière de coin. La figure 5.5 montre le premier élément choisi avec un « Aspect Ratio » de 2.

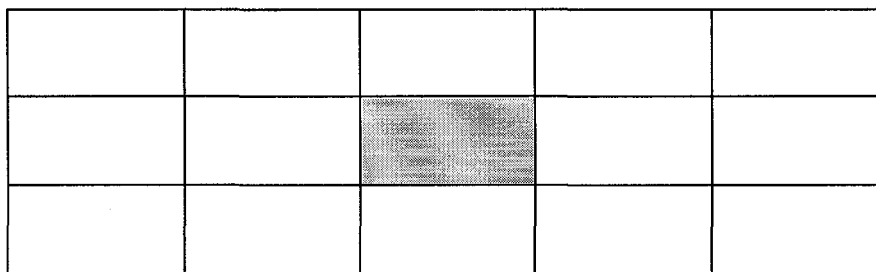


Figure 5.5 Illustration de l'élément interne à raffiner lors de la comparaison des modèles sur l'« Aspect Ratio »

Le tableau 5.II présente pour chaque modèle le nombre total de « Bad Shape Elements » (BSE), le nombre de BSE dû à un angle obtus ainsi que l'angle maximum et la moyenne des angles obtus et le nombre de BSE dû à un angle de parallélisme supérieur à 70° en inscrivant aussi les valeurs maximales et moyennes.

Tableau VII

Tableau résumé de la comparaison des modèles sur l'effet de l'« Aspect Ratio » pour un élément interne

Modèle de Kwak basé sur une décomposition "octree"							
AR	Nombre de BSE	Dû à un angle obtus (155°)			Dû au parallélisme (70°)		
		NB BSE	MAX	MOY	NB BSE	MAX	MOY
1	4	0	-	-	4	90	90
1,5	2	0	-	-	2	112,6	112,6
2	2	0	-	-	2	126,9	126,9
2,5	10	10	158,2	158,2	2	136,4	136,4
3	10	10	161,6	161,6	10	143,1	85,88
Modèle de Ansys® avec un faible niveau de raffinement (1/10)							
AR	Nombre de BSE	Dû à un angle obtus (155°)			Dû au parallélisme (70°)		
		NB BSE	MAX	MOY	NB BSE	MAX	MOY
1	1	0	-	-	1	74,37	74,37
1,5	1	0	-	-	1	95,86	95,86
2	3	2	159,8	159,8	2	113,9	98,27
2,5	3	3	163,5	161,6	2	128,7	113,0
3	6	5	165,8	161,8	4	135,6	98,31
Modèle de Ansys® avec un niveau de raffinement élevé (1/80)							
AR	Nombre de BSE	Dû à un angle obtus (155°)			Dû au parallélisme (70°)		
		NB BSE	MAX	MOY	NB BSE	MAX	MOY
1	0	0	-	-	0	-	-
1,5	2	0	-	-	2	101,3	92,53
2	4	1	155,04	155,04	3	116,1	100,7
2,5	13	9	159,9	157,6	6	125,0	93,15
3	17	14	163,5	159,4	6	136,7	113,2
Modèle de raffinement elliptique							
AR	Nombre de BSE	Dû à un angle obtus (155°)			Dû au parallélisme (70°)		
		NB BSE	MAX	MOY	NB BSE	MAX	MOY
1	0	0	-	-	0	-	-
1,5	12	4	155,5	155,5	8	81,88	76,20
2	12	8	161,1	159,3	8	98,31	87,51
2,5	14	8	165,0	163,3	10	110,7	93,02
3	16	8	167,5	166,1	12	120,1	95,27

Lorsque l'utilisateur sélectionne un élément à l'intérieur du maillage, le nombre de « Bad Shape Elements » grimpe immédiatement à douze pour un « Aspect Ratio » légèrement supérieur à 1. Cela peut sembler inquiétant si les grandeurs de distorsion ne sont pas observées. En regard à l'angle obtus maximum de 155° imposé par Ansys® [37], tous les modèles de raffinement sont sensiblement équivalents. En contre partie, le schéma de

raffinement elliptique est de qualité supérieure aux autres modèles en ce qui a trait à la distorsion due au dépassement de la limite permise de  $70^\circ$  pour l'angle de parallélisme.

Pour la deuxième zone explorée, la figure 5.6 montre l'élément sélectionné. Cette dernière comparaison permet d'observer les distorsions sur une frontière du domaine.

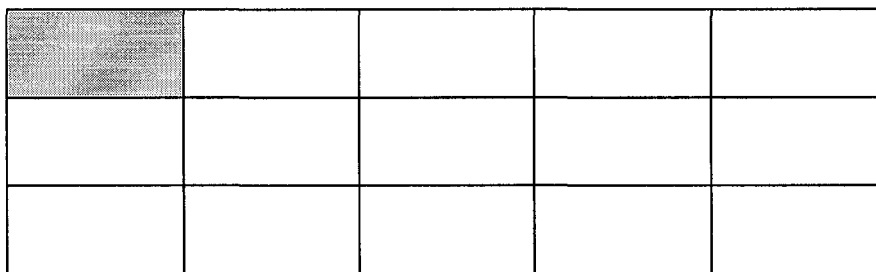


Figure 5.6 Illustration de l'élément de coin à raffiner lors de la comparaison des modèles sur l'« Aspect Ratio »

Les principaux résultats tels le nombre de « Bad Shape Elements » et les valeurs des angles obtus et de parallélisme sont recueillies dans le tableau 5.III. Sur la frontière, le modèle à faible niveau de raffinement offert par Ansys<sup>®</sup> est parfait, sans « Bad Shape Element ». Mais attention, ce modèle a un faible niveau de raffinement peut entraîner un manque de précision dû à la taille des éléments. Par conséquent, le schéma elliptique est très comparable aux autres maillages. Le modèle basé sur une décomposition « octree » de Kwak [22-24] n'est pas acceptable pour ce qui est du parallélisme. Il est aussi à noter que le modèle elliptique sur les frontières n'a subi que des modifications manuelles mineures pour éviter les « Bad Shape Elements » avec un « Aspect ratio » de 1. Une amélioration du schéma au même titre que celle effectuée sur le modèle de base aiderait certainement. En suggestion, une étude complète sur l'optimisation à plusieurs variables du schéma elliptique viendrait probablement réduire le nombre d'éléments distordus.

Tableau VIII

Tableau résumé de la comparaison des modèles sur l'effet de l'« Aspect Ratio » pour un élément frontalier

Modèle de Kwak basé sur une décomposition "octree"							
AR	Nombre de BSE	Dû à un angle obtus (155°)			Dû au parallélisme (70°)		
		NB BSE	MAX	MOY	NB BSE	MAX	MOY
1	2	0	-	-	2	90	90
1,5	1	0	-	-	1	112,6	112,6
2	1	0	-	-	1	126,9	126,9
2,5	4	4	158,2	158,2	1	136,4	136,4
3	4	4	161,6	161,6	4	143,1	89,45
Modèle de Ansys® avec un faible niveau de raffinement (1/10)							
AR	Nombre de BSE	Dû à un angle obtus (155°)			Dû au parallélisme (70°)		
		NB BSE	MAX	MOY	NB BSE	MAX	MOY
1	0	0	-	-	0	-	-
1,5	0	0	-	-	0	-	-
2	0	0	-	-	0	-	-
2,5	0	0	-	-	0	-	-
3	0	0	-	-	0	-	-
Modèle de Ansys® avec un niveau de raffinement élevé (1/80)							
AR	Nombre de BSE	Dû à un angle obtus (155°)			Dû au parallélisme (70°)		
		NB BSE	MAX	MOY	NB BSE	MAX	MOY
1	0	0	-	-	0	-	-
1,5	1	0	-	-	1	80,10	80,10
2	5	2	160,1	157,8	3	99,50	87,32
2,5	9	6	163,6	158,8	4	108,6	90,42
3	10	6	165,9	162,7	5	116,8	93,78
Modèle de raffinement elliptique							
AR	Nombre de BSE	Dû à un angle obtus (155°)			Dû au parallélisme (70°)		
		NB BSE	MAX	MOY	NB BSE	MAX	MOY
1	0	0	-	-	0	-	-
1,5	7	4	158,8	157,2	3	81,80	77,33
2	10	7	164,0	160,5	5	98,31	83,25
2,5	13	8	167,2	163,3	8	110,7	86,96
3	14	8	169,3	166,2	9	120,1	91,58



### 5.3 Application de la méthode de raffinement dans des cas typiques

Finalement, il est important de valider le nouveau modèle avec des exemples concrets. La première analyse porte sur l'effet d'un moment de flexion sur une plaque rectangulaire droite. Le second cas est un tube à paroi mince en flexion pure. La validation se termine avec l'étude de cas typiques de plaques trouées, encochées et avec des changements de section que propose Shigley [40]. Chaque étude présente une description du problème, une solution théorique et des comparaisons de solutions analytiques pour des maillages grossiers d'« Aspect Ratio » d'environ 1 en raffinant globalement en augmentant le nombre d'éléments sur la hauteur par rapport à des maillages raffinés localement avec le modèle elliptique.

#### 5.3.1 Plaque droite en flexion pure

Le premier problème est une plaque de 1000 mm de longueur par 50 mm en hauteur. La plaque a une épaisseur de 12 mm. Elle est soumise à un moment de flexion de 500 N•m. Une description imagée du problème est présentée à la figure 5.7.

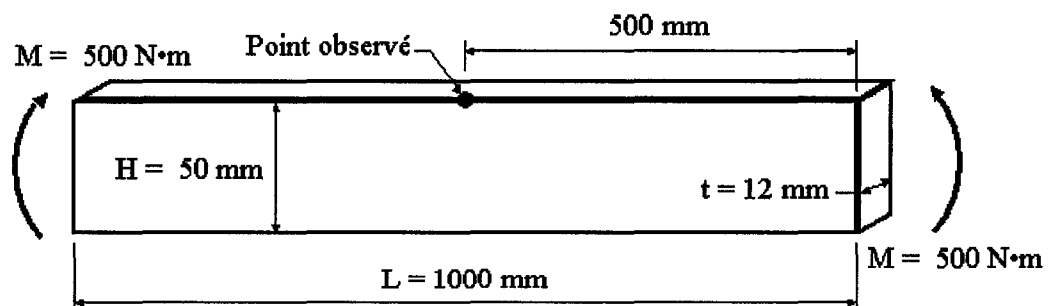


Figure 5.7 Schéma du premier cas de validation, une plaque rectangulaire droite en flexion pure

Selon Bazergui [38], la contrainte normale maximale dans une poutre régulière droite en flexion pure est donnée par l'équation 5.1 :

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{6M}{t * H^2} \quad (5.1)$$

Pour les données du présent problème, la contrainte maximale est de :

$$\sigma_{\max} = \frac{6 * 500 \times 10^3}{12 * 50^2} = 100 \text{ MPa} \quad (\text{Tension et Compression})$$

La figure 5.8 affiche l'allure d'un maillage grossier avec deux éléments sur la hauteur. Il est aussi possible de remarquer les tranches de contraintes puisque le moment est constant tout au long de la poutre.

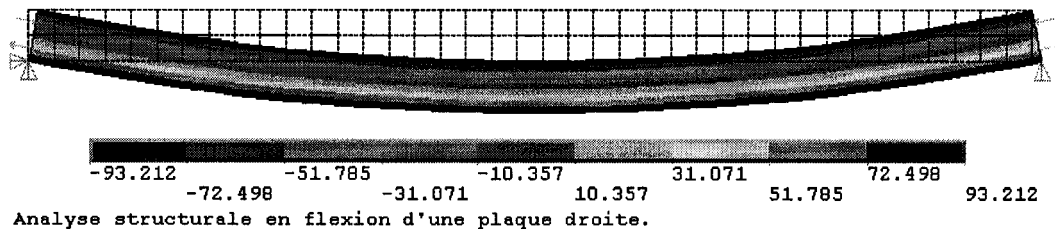


Figure 5.8 Illustration d'un maillage grossier avec deux éléments sur la hauteur

La figure 5.9 montre quant à elle un maillage grossier raffiné localement à l'aide du modèle de raffinement elliptique.

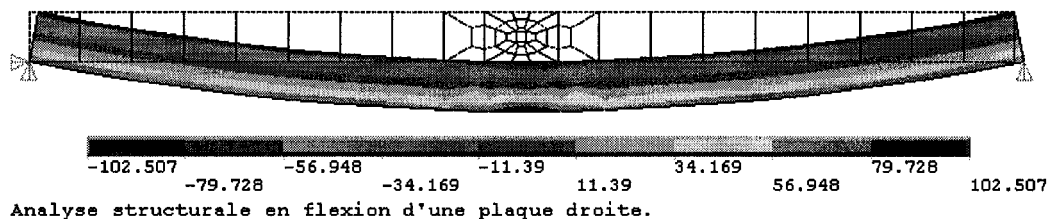


Figure 5.9 Illustration du raffinement local elliptique pour un maillage grossier avec seulement un élément sur la hauteur

Le graphique des résultats obtenus lors des simulations est présenté à la figure 5.10. Les courbes illustrent le rapport de la contrainte obtenue en simulation sur la contrainte calculée théoriquement en fonction du nombre d'éléments au total dans le maillage de départ.

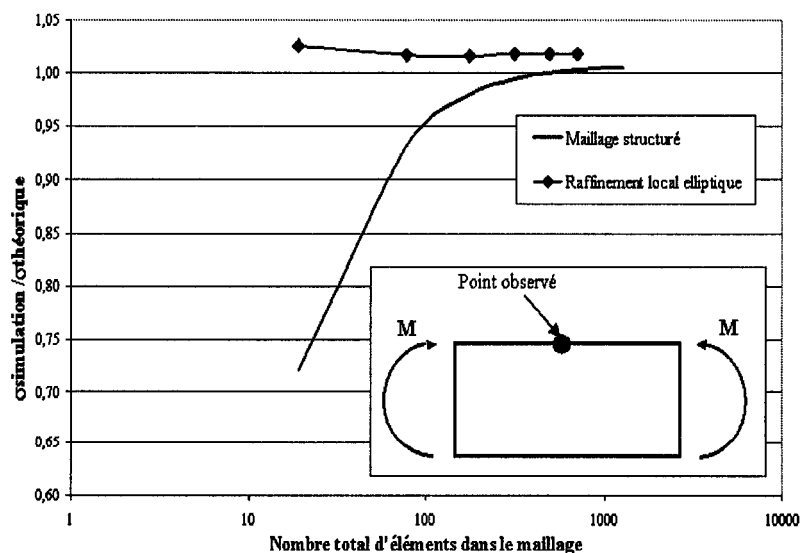


Figure 5.10 Graphique des résultats pour une plaque droite en flexion pure

Selon les résultats obtenus, pour amener l'écart entre la contrainte théorique et la contrainte simulée sous la barre des 3%, il importe que le nombre d'éléments au total soient supérieur à cent pour un maillage entièrement structuré. Lorsque le modèle de raffinement elliptique est appliqué localement, l'écart est de 2,5% avec une cinquantaine d'éléments au total. Une étude lors du cours « Application de la méthode des éléments finis » avait confirmé que l'écart relatif était acceptable avec trois éléments dans l'épaisseur pour un problème de flexion. De plus, toutes les données obtenues lors d'un raffinement local à l'aide du schéma elliptique sont sécuritaires car les contraintes de la simulation sont plus grandes que la contrainte théorique. Il est aussi à noter que le point analysé est limitrophe et que l'algorithme de raffinement pour les frontières n'a pas subi de transformation d'amélioration. Un redressement des éléments pour les amener les plus droits possibles où les résultats sont analysés diminuerait l'écart entre les valeurs théoriques et les valeurs observées.

### 5.3.2 Tube à paroi mince en flexion pure

Le deuxième cas est l'analyse d'un tube à paroi mince en flexion pure. Le tube a un diamètre extérieur de 50 mm et une épaisseur de 2 mm. La longueur du tube est de 1 m. Un moment de flexion de 348 N·m est appliqué aux extrémités. La figure 5.11 illustre la description du problème.

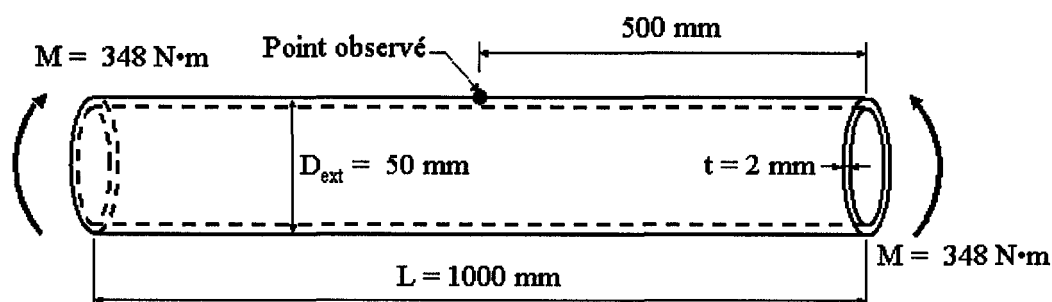


Figure 5.11 Illustration du deuxième cas d'analyse, un tube à paroi mince en flexion pure

Selon Bazergui [38], la contrainte normale maximale dans un cas de flexion pure est redonnée par l'équation 5.2 :

$$\sigma = \frac{Mc}{I} \quad (5.2)$$

où  $c$  représente cette fois le rayon extérieur, et pour une poutre de section tubulaire, le moment d'inertie  $I$  est égal à :

$$I = \frac{\pi}{64} (D_{ext}^4 - D_{int}^4) \quad (5.3)$$

Pour des raisons simplificatrices, seulement la moitié du modèle est analysée. Cela est rendu possible parce que la géométrie est symétrique et le chargement est dans le plan de symétrie. Cependant, le second moment de surface d'une section demi-tubulaire est deux fois plus petite. Alors pour obtenir les résultats d'un tube complet, le moment induit  $M$  doit être aussi diminué de moitié. Alors la contrainte normale au point observé vaut théoriquement :

$$\sigma_{\max} = \frac{M * (D_{ext}/2)}{\frac{\pi}{128} (D_{ext}^4 - D_{int}^4)} = \frac{64 * 348 \times 10^3 * 50}{\pi (50^4 - 46^4)} = 100 \text{ MPa}$$

La figure 5.12 présente le maillage grossier du demi-tube avec quatre éléments dans la demi-circonférence et cinquante-trois éléments sur la longueur. La contrainte normale au point observé est de 113,5 MPa en compression soit 13,5% au-dessus de la valeur théorique.

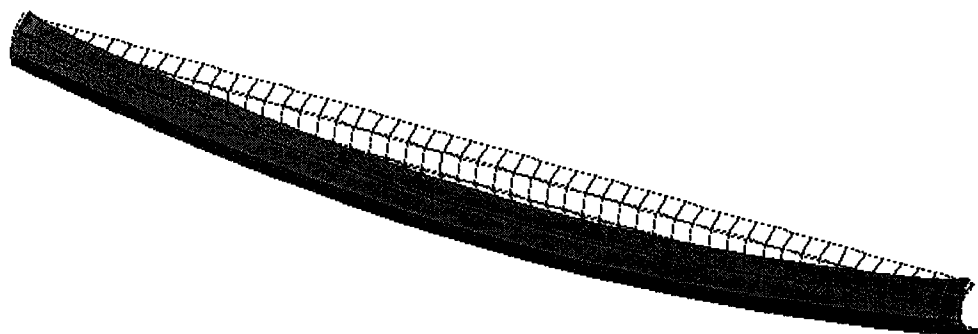


Figure 5.12 Illustration d'un maillage grossier avec quatre éléments dans la demi-circonférence

Pour le modèle raffiné localement, la figure 5.13 montre le maillage du demi-tube. La contrainte normale maximum observée à mi-longueur est maintenant de 98 MPa. Ce qui fait un écart relatif de 2% par rapport au résultat théorique.

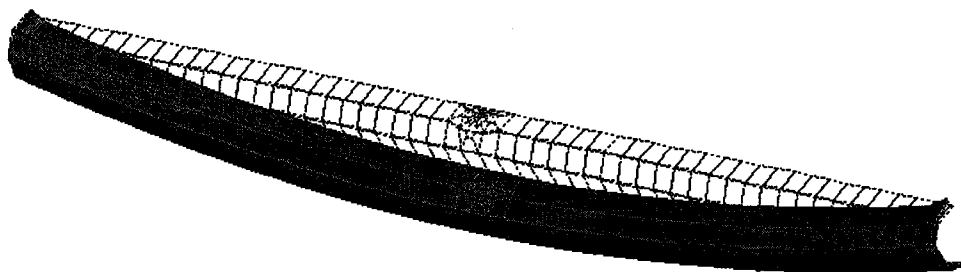


Figure 5.13 Modélisation du maillage raffiné localement avec quatre éléments dans la demi-circonférence

Pour un modèle avec huit éléments dans la demi-circonférence, l'erreur relative est de 3,3% pour un maillage grossier et de 2,3% pour le modèle raffiné localement avec le schéma elliptique. Les résultats sont très satisfaisants même si le schéma de raffinement elliptique n'est pas optimum sur les frontières.

### 5.3.3 Plaque trouée en traction pure

Dans le troisième cas, une plaque trouée en son centre soumise à une force de traction pure est analysée. La plaque a une longueur totale de 1200 mm, une hauteur de 60 mm et une épaisseur de 10 mm. Le trou du centre a un rayon de 10 mm. La force de traction est de 17 kN. Une description plus visuelle du problème est exprimée à la figure 5.14.

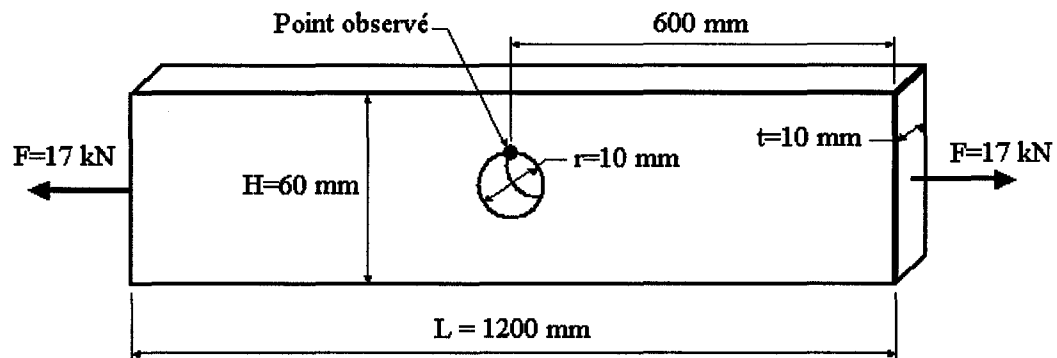


Figure 5.14 Description imagée d'une plaque trouée au centre soumise à une force de traction pure

La contrainte normale due à une force de traction, selon Bazergui [38], est donnée par l'équation 5.4 :

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (5.4)$$

Mais puisqu'il y a concentration de contrainte près du trou, la contrainte normale nominale est majorée d'un certain facteur. Le facteur de concentration de contrainte est donné par le graphique de la figure 5.15.

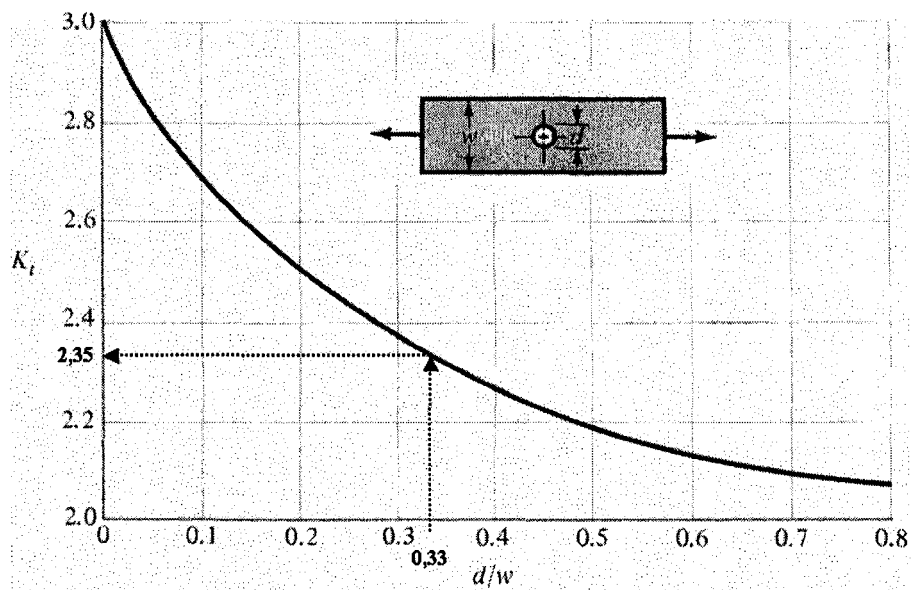


Figure 5.15 Graphique pour le facteur de concentration de contrainte pour une plaque trouée en traction pure<sup>1</sup>

Pour obtenir le facteur de concentration de contrainte  $k_t$ , le rapport du diamètre du trou sur la hauteur de la plaque doit être calculé :

$$\frac{d}{H} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3} = 0,33 \Rightarrow k_t = 2,35$$

<sup>1</sup> Tiré et adapté de Shigley [35].



Par la suite, la contrainte maximale est calculée, mais comme la plaque est bi-symétrique, seulement le quart de la plaque est modélisée, alors :

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\text{nom}} * k_t = \frac{F/2}{(H/2 - r) * t} * k_t = \frac{17 \times 10^3 / 2}{(60/2 - 10) * 10} * 2,35 = 100 \text{ MPa}$$

La figure 5.16 montre la modélisation du quart de la plaque avec un maillage grossier, ainsi que les conditions de symétrie et le chargement. La contrainte maximale au point observé est de 64,2 MPa, ce qui fait une erreur relative de 46%.

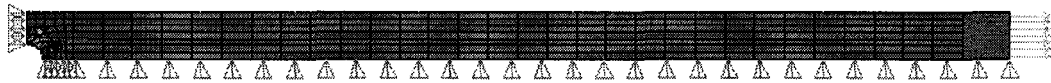


Figure 5.16 Modélisation d'une plaque trouée en traction à l'aide d'un maillage grossier

En applique le modèle de raffinement elliptique localement, à la concentration de contrainte, la contrainte normale maximale observée est de 76,4 MPa. Une diminution de l'erreur relative de plus de 10%. La partie de la modélisation où il y a concentration de contraintes, est illustrée à la figure 5.17. Une optimisation du schéma de raffinement elliptique permettrait de réduire la distorsion des éléments près de la zone d'analyse donc l'obtention d'une précision accrue.



Figure 5.17 Modélisation de la plaque trouée raffinée localement à l'aide du schéma elliptique

### 5.3.4 Plaque encochée en traction pure

Le quatrième cas examiné est une plaque encochée soumise à une seule force de traction dont la ligne d'action passe par le centroïde de la section. Les dimensions externes de la plaque sont 1200 mm de longueur, 60 mm de hauteur et 10 mm d'épaisseur. Le rayon de l'encoche est de 10 mm. La figure 5.18 présente une illustration de la description du problème.

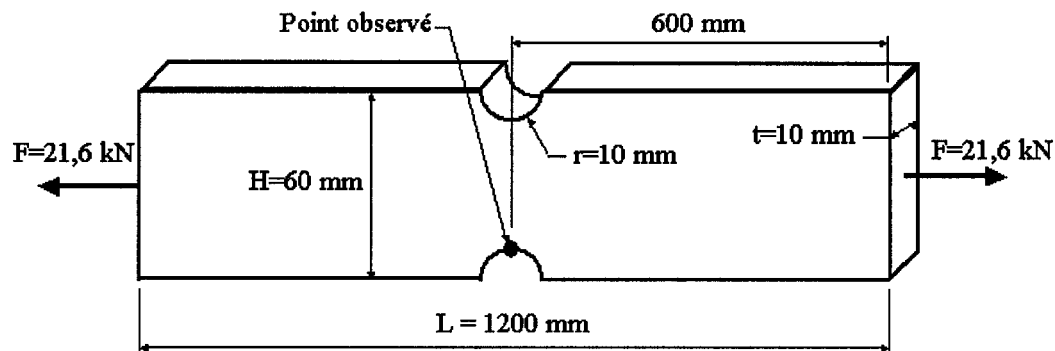


Figure 5.18 Schématisation d'une plaque encochée en traction pure

Le calcul de la contrainte théorique maximale dans ce cas se fait de la même façon que pour une plaque trouée à l'exception près du facteur de concentration de contrainte. Le facteur de concentration de contrainte est tiré du graphique de la figure 5.19. Pour obtenir ce facteur, les rapports de la hauteur sur la hauteur effective entre les encoches et du rayon des encoches sur la hauteur effective de la plaque doivent être calculés.

$$\frac{w}{d} = \frac{60}{40} = 1,5 \quad \text{et} \quad \frac{r}{d} = \frac{10}{40} = 0,25 \quad \Rightarrow \quad k_t = 1,85$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\text{nom}} * k_t = \frac{F/2}{(H/2 - r) * t} * k_t = \frac{21,6 \times 10^3 / 2}{(60/2 - 10) * 10} * 1,85 = 100 \text{ MPa}$$

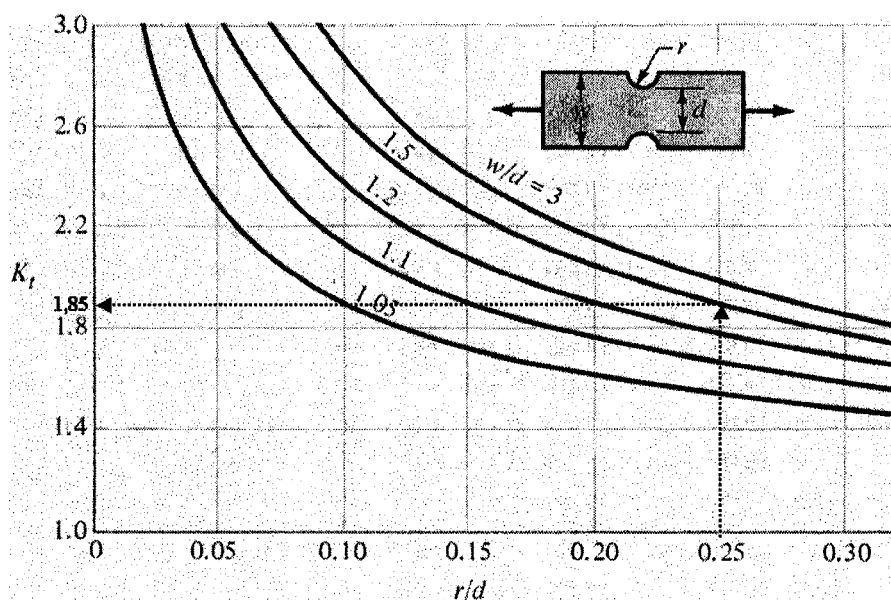


Figure 5.19 Graphique pour le facteur de concentration de contrainte pour une plaque encochée en traction pure<sup>1</sup>

Une fois de plus, seulement le quart de la plaque est modélisé. Cependant, les conditions de symétrie ne sont pas les mêmes, la figure 5.20 montre les nouvelles conditions. Pour un maillage grossier, la contrainte normale maximale est de 76,2 MPa. Avec un raffinement local de maillage à l'aide du schéma elliptique, la contrainte maximum au point observé est de 90 MPa. Une optimisation permettant l'obtention d'éléments les plus droits possibles dans la région critique, tout en respectant une zone de transition entre le maillage grossier, améliorerait les résultats.



Figure 5.20 Modélisation d'un quart de plaque encochée soumise à une force de traction maillée de façon grossière

<sup>1</sup> Tiré et adapté de Shigley [35].

### 5.3.5 Plaque encochée en flexion pure

Le cinquième cas à l'étude est une plaque encochée mais cette fois-ci, un moment de flexion est appliqué à ses extrémités. Les dimensions de la plaque sont les mêmes que dans le cas précédent. L'intensité du moment de flexion est de  $168,8 \text{ N}\cdot\text{m}$ . La contrainte nominale pour une poutre de section rectangulaire est donnée par l'équation 5.1. Mais pour obtenir la contrainte maximale, il faut multiplier la contrainte nominale par un facteur de concentration de contrainte fourni par la figure 5.21.

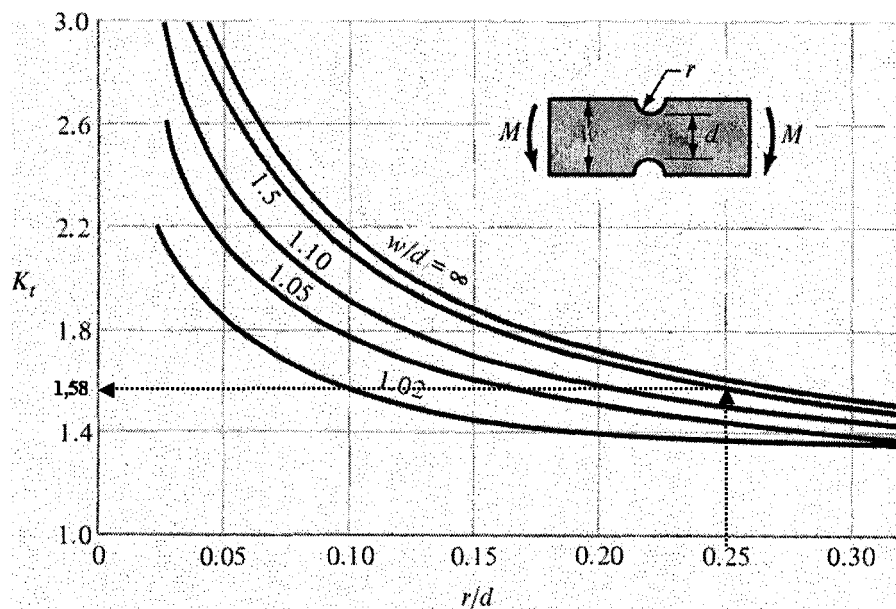


Figure 5.21 Graphique pour le facteur de concentration de contrainte pour une plaque encochée en traction pure<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Tiré et adapté de Shigley [35].

Comme les dimensions de la plaque sont identiques à celle de l'exemple précédent, le facteur de concentration de contrainte  $k_t$  vaut 1,58 et la contrainte maximale est :

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\text{nom}} * k_t = \frac{6M}{td^2} * k_t = \frac{6 * 168,8 \times 10^3}{10 * 40^2} * 1,58 = 100 \text{ MPa}$$

La contrainte maximale calculée à l'aide d'un modèle par éléments finis grossier est de 63,3 MPa. Tandis qu'avec un modèle numérique raffiné localement par le schéma elliptique, la contrainte est de 80,8 MPa. La figure 5.22 montre le modèle de maillage grossier pour l'analyse d'une plaque encochée en flexion pure ainsi que les résultats obtenus. En raffinement localement à l'aide du schéma elliptique, l'erreur relative diminue de moitié, elle est inférieure à 20% sans que le modèle de raffinement soit optimal.

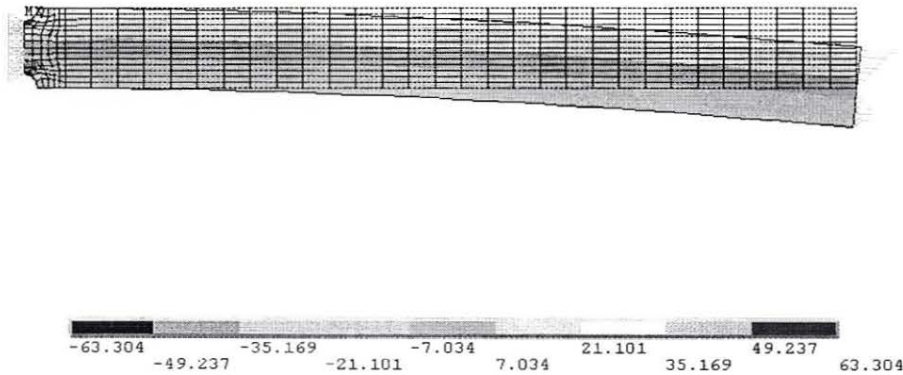


Figure 5.22 Modèle de maillage grossier et résultats pour une plaque encochée en flexion pure

### 5.3.6 Plaque avec changement de section en traction pure

L'avant dernier cas est une plaque de section rectangulaire avec changement de la section à l'aide d'un rayon de 10 mm. La plaque est soumise à une force de traction pure de 24,5 kN. Les autres dimensions de la poutre sont données à la figure 5.23.

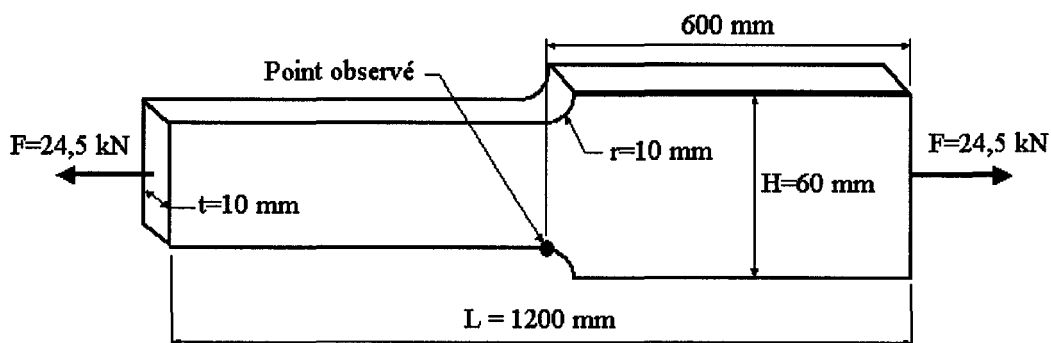


Figure 5.23 Description imagée d'une plaque avec un changement de section en traction pure

L'équation 5.4 évalue la contrainte normale d'une plaque rectangulaire en traction. Cependant, dû au changement de section il y a concentration de contrainte. Le facteur de concentration de contrainte pour une plaque avec un changement de section est donné par le graphique de la figure 5.24. Par la suite, la contrainte nominale est majorée de ce facteur pour obtenir la contrainte normale maximale.

$$\frac{D}{d} = \frac{60}{40} = 1,5 \quad \text{et} \quad \frac{r}{d} = \frac{10}{40} = 0,25 \Rightarrow k_t = 1,63$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\text{nom}} * k_t = \frac{F/2}{(H/2 - r) * t} * k_t = \frac{24,5 \times 10^3 / 2}{(60/2 - 10) * 10} * 1,63 = 100 \text{ MPa}$$

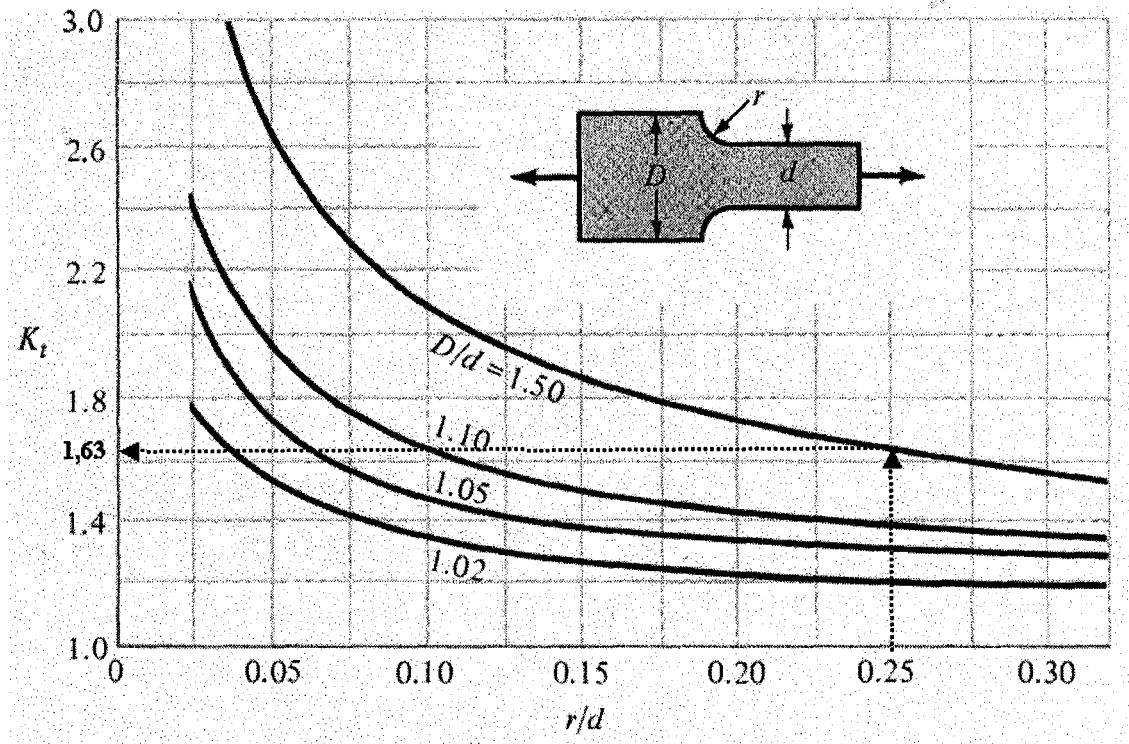


Figure 5.24 Graphique pour le facteur de concentration de contrainte pour une plaque avec un changement de section en traction pure<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Tiré et adapté de Shigley [35].



Pour réduire la taille du modèle en nombre d'éléments, seulement la moitié de la plaque est modélisée puisque la géométrie est symétrique et que le chargement l'est également. Une partie de la plaque maillée grossièrement avec un raffinement local est présentée à la figure 5.25.



Figure 5.25 Modèle de la plaque avec un changement de section maillée grossièrement avec un raffinement local

Pour un maillage grossier, la contrainte normale maximum est de 72,4 MPa. La contrainte maximale atteinte est de 76 MPa lorsque le schéma de raffinement elliptique est appliqué. Il est certain que des éléments moins distordus près du nœud observé diminuerait l'écart relatif dans le cas d'un raffinement local. Des améliorations dans ce sens devraient être apportées au schéma elliptique.

### 5.3.7 Plaque avec changement de section en flexion pure

Le sixième cas est la même plaque avec un changement de section étudiée dans le cas précédent. Cette fois-ci, la plaque est testée en flexion pure. Le moment de flexion est de  $183,9 \text{ N}\cdot\text{m}$ . La contrainte normale pour une section rectangulaire droite est donnée par l'équation 5.1 et le facteur de concentration de contrainte se trouve dans le graphique de la figure 5.26.

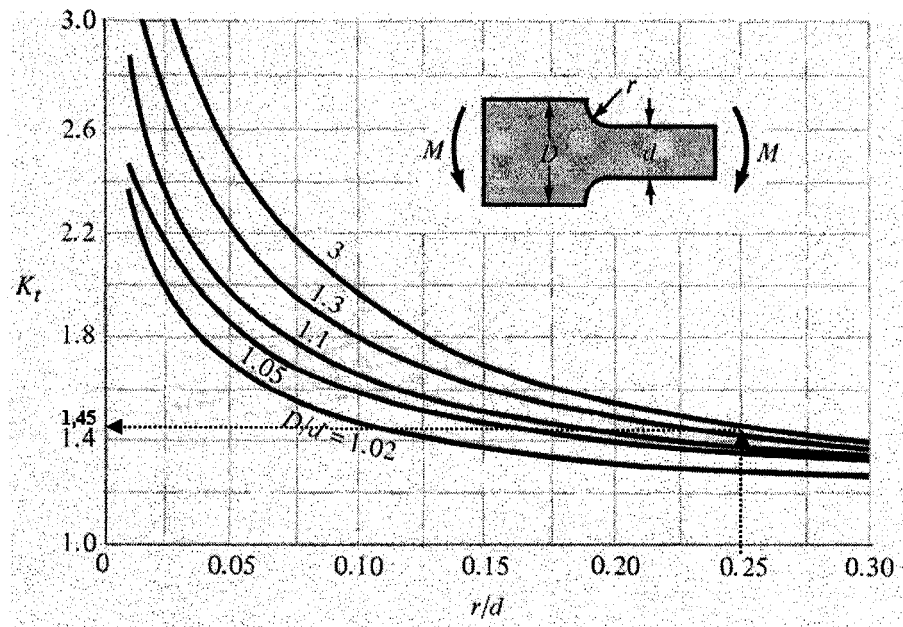


Figure 5.26 Graphique pour le facteur de concentration de contrainte pour une plaque avec un changement de section en flexion pure<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Tiré et adapté de Shigley [35].

La contrainte nominale majorée du facteur de concentration de contrainte donne la contrainte normale maximale théorique :

$$\frac{D}{d} = \frac{60}{40} = 1,5 \quad \text{et} \quad \frac{r}{d} = \frac{10}{40} = 0,25 \Rightarrow k_t = 1,45$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\text{nom}} * k_t = \frac{F/2}{t * (H/2 - r)^2} * k_t = \frac{6 * 183,9 \times 10^3}{10 * (60/2 - 10)^2} * 1,45 = 100 \text{ MPa}$$

La contrainte maximale calculée numériquement pour le modèle maillé grossièrement, présenté à la figure 5.27, est de 65,2 MPa. Si le maillage est raffiné localement à l'aide du schéma elliptique, la contrainte maximale est de 69 MPa au point observé.

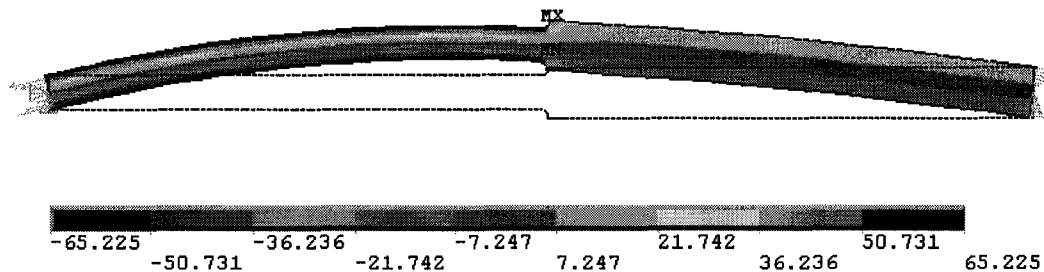


Figure 5.27 Résultats de la plaque avec un changement de section en flexion pure pour le maillage grossier

Le faible gain sur l'écart relatif pour un maillage raffiné est causé par les mêmes raisons évoquées tout au long de ce chapitre. Premièrement, le schéma elliptique n'a pas subi d'amélioration lorsqu'il est appliqué sur une frontière du domaine. De plus, pour les deux derniers cas, le schéma de raffinement elliptique est appliqué sur des éléments ayant un « Aspect ratio » supérieur à 3. La réduction d'éléments distordus près de la région analysée et le maintien d'une zone de transition entre les petits et les gros éléments sont des changements qui feraient en sorte que les résultats soient plus précis.

## CHAPITRE 6

### PERSPECTIVES

Présentement, des essais préliminaires sont faits dans le but de mailler par krigeage de façon structurée avec des éléments briques des solides. La figure 6.1 illustre les points à kriger ainsi que les trois directions des profils.

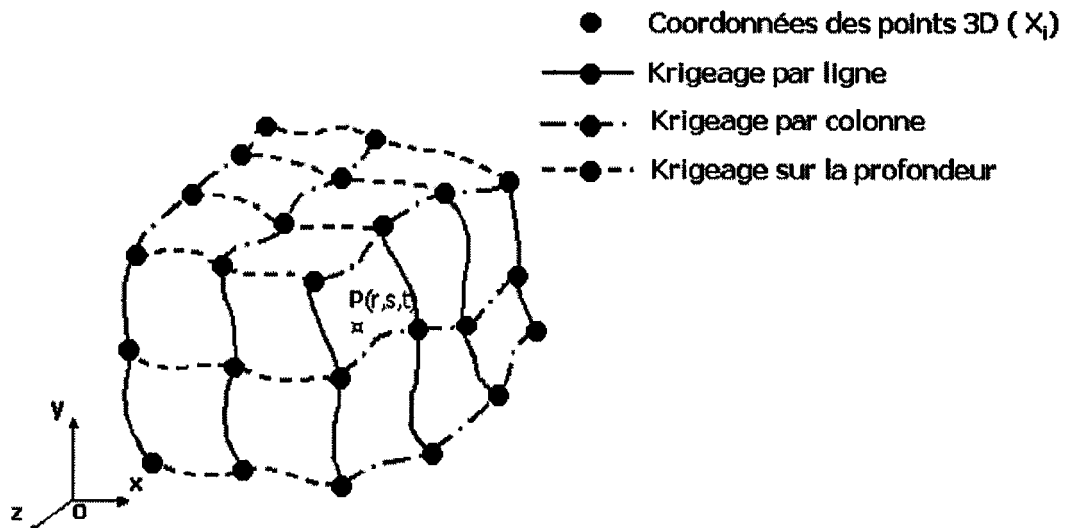


Figure 6.1 Illustration d'une pièce solide krigée

Un des inconvénients actuellement est que les équations du krigeage ne sont développées que pour le krigeage des surfaces. Cependant, une méthode de découpage de pièces solides en tranches par la reconnaissance des contours est intégrée au logiciel de conception assistée par ordinateur, ProEngineer®. Les tranches alors générées peuvent être interprétées comme les contours de surfaces. Pour chaque surface, seulement les coordonnées des points sur les contours sont connues. Une démonstration de la méthodologie est présentée à la figure 6.2.

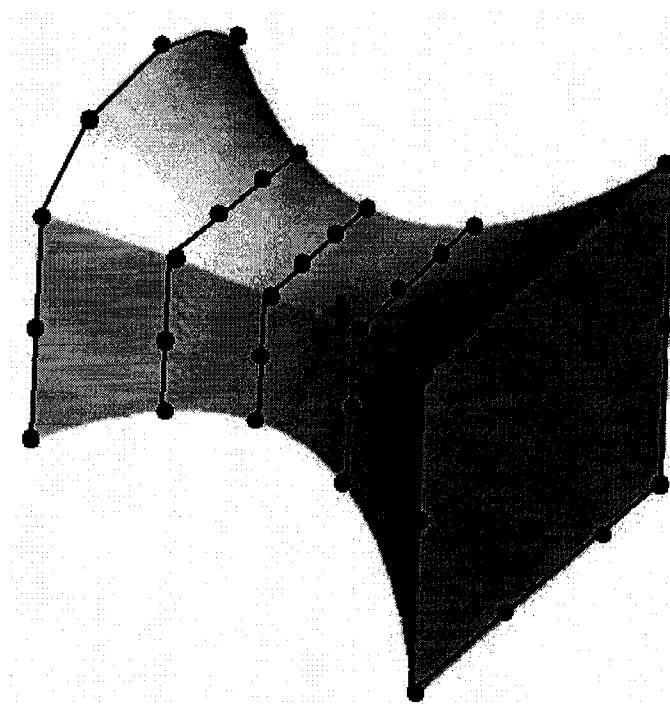


Figure 6.2 Découpage d'un solide en tranches à l'aide d'un module inséré dans ProE®

En bref, l'interface de ProE® demande à l'utilisateur de sélectionner une première surface de référence, c'est-à-dire la surface d'origine de l'incrémentation des tranches et une seconde qui fait référence à la surface finale. Cette sélection permet essentiellement de déterminer la direction de l'incrémentation des coupes ainsi que la distance à parcourir. Par la suite, l'utilisateur doit fournir le nombre de tranches qu'il désire, incluant les deux faces aux extrémités, ainsi que le nombre de points sur les arêtes. Il est important que pour deux arêtes opposées, que le nombre de points soit le même pour une génération de maillage structuré. Afin d'obtenir une qualité de maillage satisfaisante et une modélisation près de la réalité, il faut choisir une direction dans laquelle les surfaces extrêmes sont planes, et il est préférable que ces surfaces aient à peu près les mêmes dimensions.

Pour être en mesure de générer correctement un maillage de brique par krigeage, il faut générer un nombre identique de points intermédiaires dans chacune des sections. Plusieurs méthodes sont approchées. Une première façon est l'utilisation de fonctions d'interpolation géométrique ou fonctions de forme avec des degrés des polynômes variant en fonction de la complexité des contours. Les figures 6.3 et 6.4 montrent que les fonctions de formes polynomiales ne sont pas satisfaisantes pour ce type de géométries.

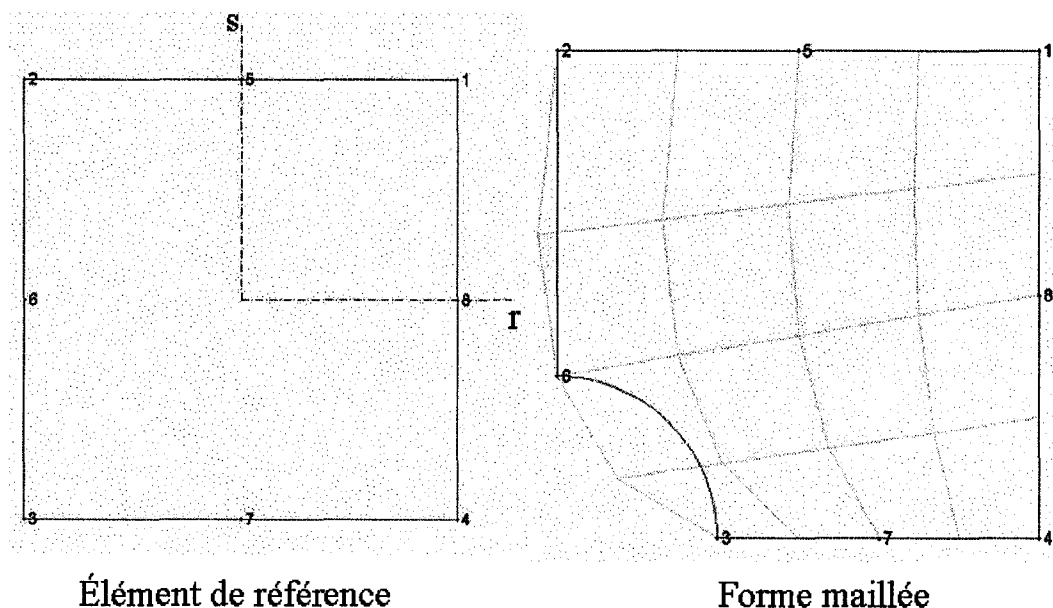


Figure 6.3 Illustration d'un élément de référence à huit nœuds et du résultat du maillage

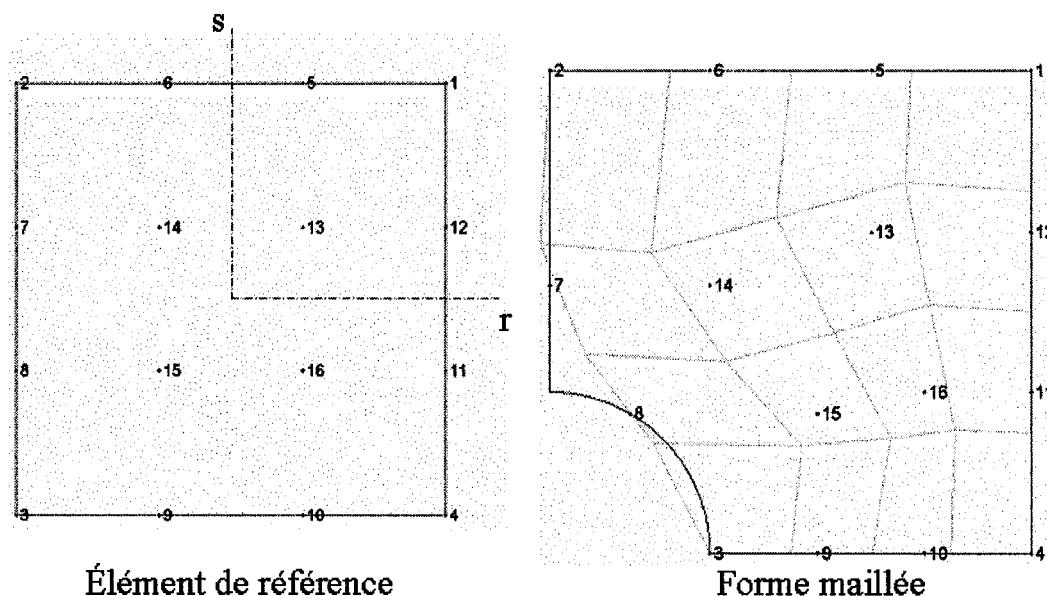


Figure 6.4 Illustration d'un élément de référence à seize nœuds et du résultat du maillage

Les deux autres méthodes envisagées consistent à générer des points intermédiaires dans les deux directions en prenant garde de respecter les proportions de distance des deux côtés. Des pondérations de proximités sont également appliquées sur les directions normales. Ces points servent par la suite à construire des courbes soit à l'aide des splines de L'Hermite ou par krigeage. Finalement, les points aux intersections des splines de L'Hermite (voir la figure 6.5) ou des courbes krigées (voir la figure 6.6), servent de nœuds intermédiaires pour le maillage. Le maillage généré à partir des courbes krigées, bien qu'il ne contienne aucun « Bad Shape Element », aurait une plus belle apparence si les arêtes des éléments près de l'arc de cercle étaient normales au contour. La spécification d'une pente comme pour les splines de L'Hermite pourrait être envisagée.

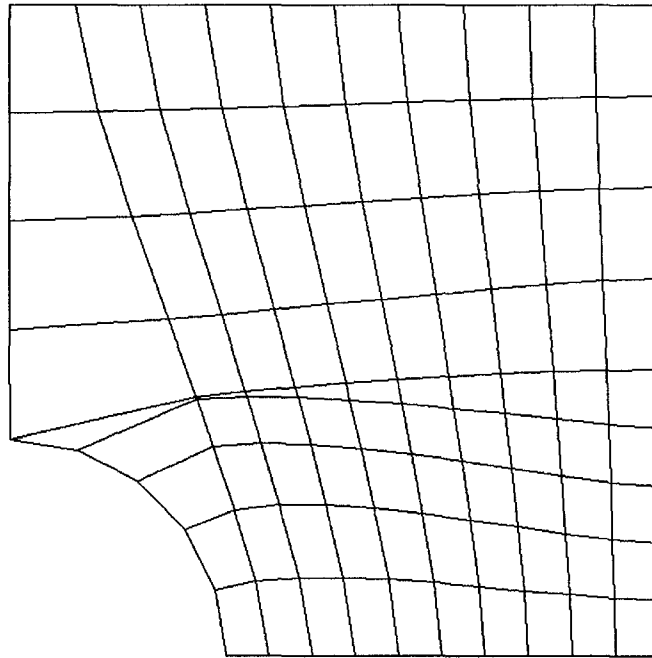


Figure 6.5 Maillage généré à l'aide des points aux intersections des splines de L'Hermite

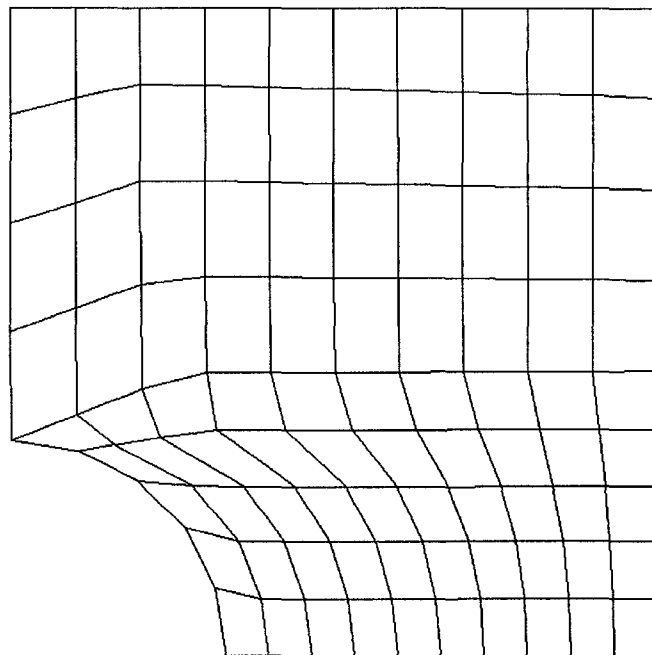


Figure 6.6 Maillage généré par les intersections des courbes krigées



Une fois que toutes les surfaces (tranches) sont maillées, il ne reste qu'à rassembler les tranches et à générer un maillage dans la troisième dimension. Le maillage structuré obtenu est présenté à la figure 6.7.

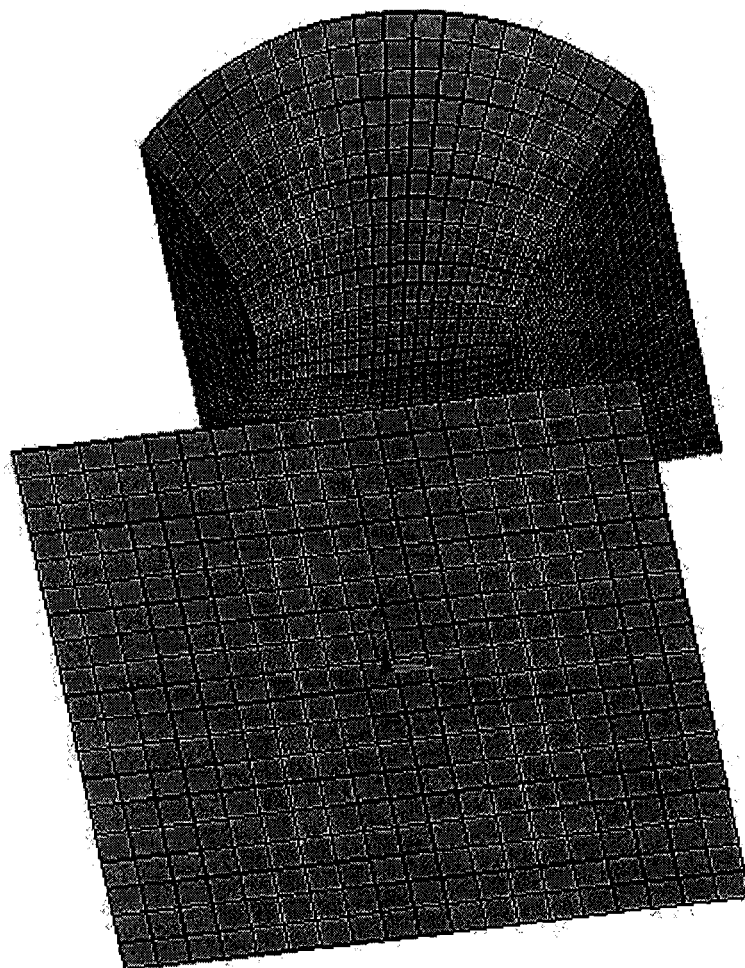


Figure 6.7 Maillage d'une pièce solide par krigage des tranches obtenues dans ProE

Et pour finir, l'application d'un raffinement elliptique en trois dimensions permettrait d'obtenir une meilleure précision sur les résultats. La figure 6.8 rappelle le schéma de raffinement elliptique en deux dimensions.

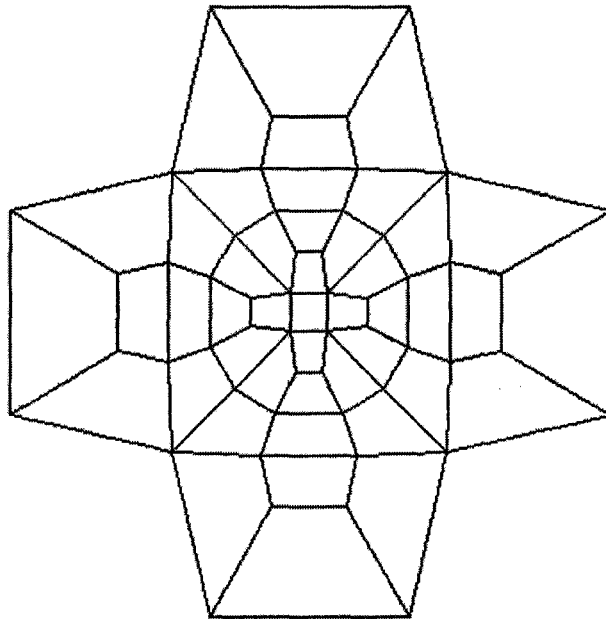


Figure 6.8 Schéma de raffinement elliptique en deux dimensions

Par analogie aux cercles utilisés pour la génération du modèle en 2D, des sphères sont utilisées pour le modèle en 3D. Le schéma de raffinement elliptique en 3D est présenté à la figure 6.9. Un coin est retiré pour permettre l'observation jusqu'au cœur du modèle et un rétrécissement est appliqué aux éléments pour mieux les discerner.

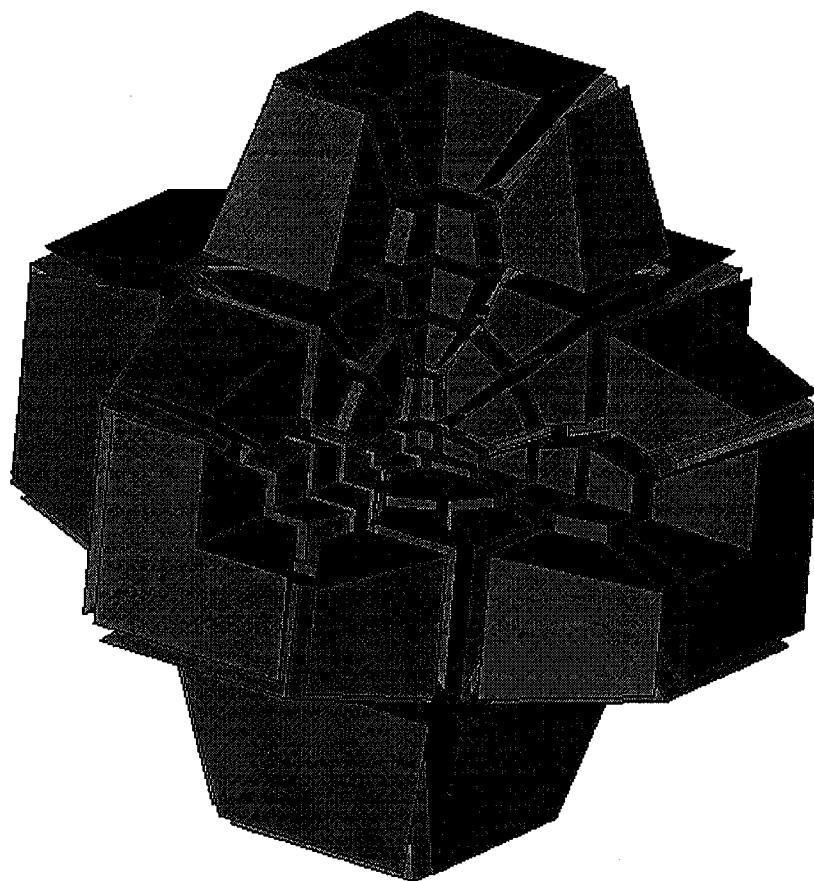


Figure 6.9 Illustration du schéma de raffinement elliptique en trois dimensions permettant l'observation jusqu'au cœur

La figure 6.10 montre un exemple où le modèle de raffinement elliptique est appliqué à un élément interne d'un domaine solide. Une partie du maillage est supprimée pour permettre la visualisation des éléments à l'intérieur de la pièce.

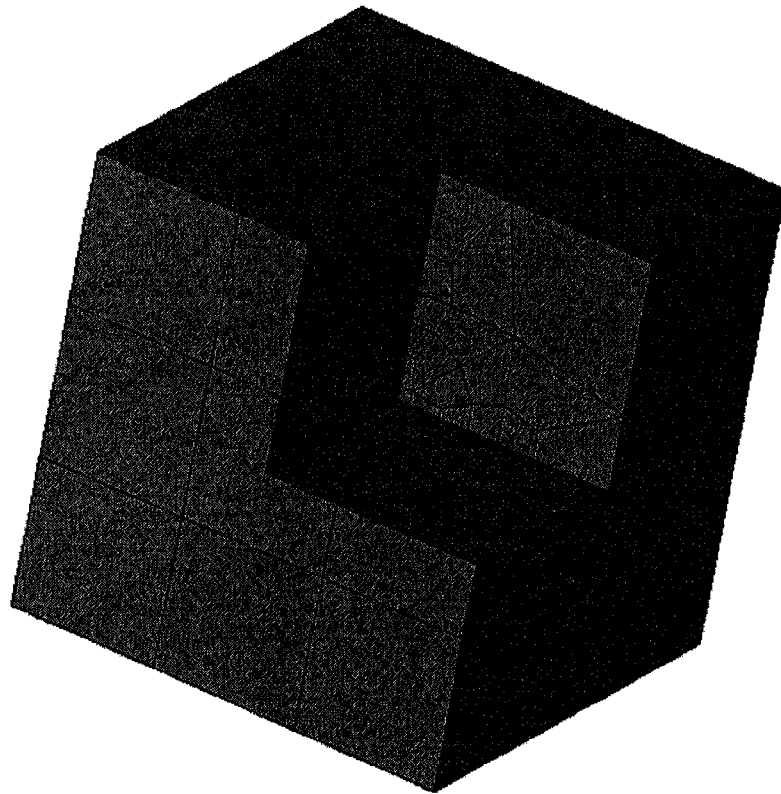


Figure 6.10 Application du schéma de raffinement elliptique en trois dimensions à un élément interne

Le schéma de raffinement elliptique peut aussi être appliqué à d'autres éléments, soit un sur une surface (figure 6.11), un autre sur une arête (figure 6.12) et un dernier sur un coin (figure 6.13).

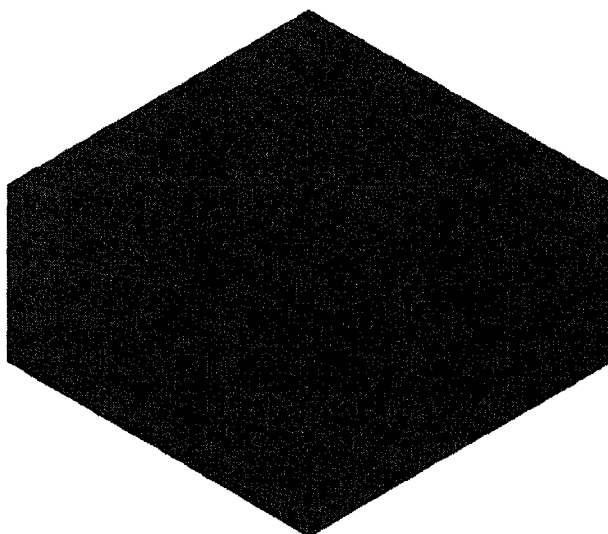


Figure 6.11 Application du schéma de raffinement elliptique en trois dimensions à un élément sur une surface

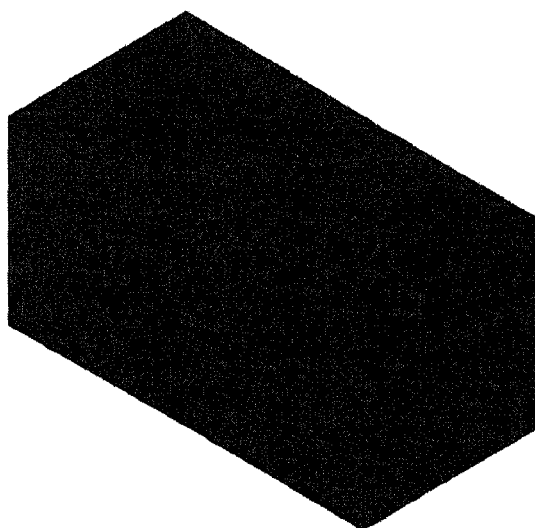


Figure 6.12 Application du schéma de raffinement elliptique en trois dimensions à un élément sur une arête

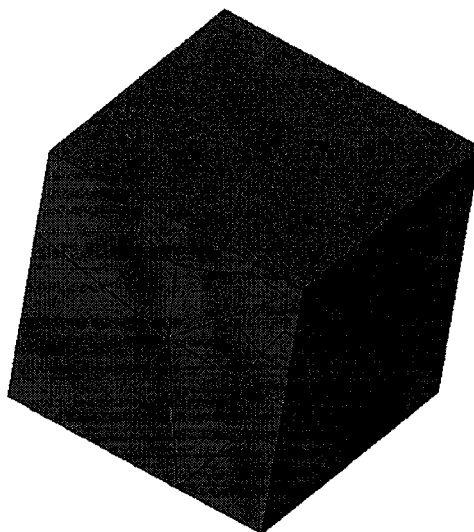


Figure 6.13 Application du schéma de raffinement elliptique en trois dimensions à un élément sur un coin

Pour obtenir un mailleur idéal, il faudrait vérifier les « Bad Shape Elements » et changer la position des nœuds pour éliminer tous les éléments trop distordus du maillage créé à partir des surfaces (tranches) obtenues de ProE®. De plus, le développement d'une méthode de krigeage pour unir les tranches dans l'épaisseur d'une façon autre que linéaire permettrait de représenter encore mieux les géométries des composantes mécaniques.

## CONCLUSION

L'objectif majeur de ce projet était d'obtenir des résultats précis localement lors d'analyses par éléments finis en minimisant le nombre d'éléments dans le maillage. La précision des résultats est accrue lorsque les éléments ont une petite taille; ce qui a pour effet d'augmenter la taille du problème à résoudre.

Le maillage de surfaces tridimensionnelles par krigeage génère des éléments à quatre côtés de façon structurée. Les éléments quadrangulaires, à proportion égale en longueur d'arête, donnent plus de précision que les triangulaires tout en diminuant le nombre d'éléments. La méthode de krigeage est surtout avantageuse dans le sens que les surfaces krigées passent nécessairement par les points connus par inspection ou par décomposition en tranches (module programmé pour ProE®.)

De plus, les équations représentant les surfaces obtenues par krigeage sont continues et dérivables. Cette dernière caractéristique permet de calculer analytiquement les directions normales en tous points afin de transformer les surfaces en volumes par extrusion. Une interface graphique interactive permet de déterminer tous les paramètres jusqu'à l'obtention d'une modélisation satisfaisante. Même les directions des normales sur les arêtes des solides générés par extrusion peuvent être modifiées de plusieurs façons afin de représenter fidèlement les pièces modélisées. Les modifications étudiées présentement sont les suivantes : de façon complète en redéfinissant la direction des normales (axe d'usinage), de façon partielle en spécifiant que le côté est un plan de symétrie ou encore, pour répondre aux exigences de conception comme c'est le cas pour les angles de dépouille des outils de coupe. D'autres cas réels pourraient être étudiés éventuellement. Après avoir satisfait aux exigences géométriques de la modélisation, il est possible de transférer le maillage dans le logiciel d'analyse par éléments finis Ansys®. Il suffit d'ajouter le type d'éléments, de déterminer le matériau et d'appliquer les conditions aux frontières et le chargement pour faire la résolution d'un problème

complet d'analyse par éléments finis. Deux publications ont découlé de cette étude [31, 34].

D'un autre côté, il est aussi possible d'augmenter la précision des résultats obtenus d'un maillage grossier, en raffinant le modèle localement. Une nouvelle technique de raffinement local a été développée, appelée le schéma de raffinement elliptique local. Ce modèle permet de cibler très localement les endroits critiques. Il offre un taux de raffinement, en fonction du nombre d'éléments, supérieur aux autres méthodes existantes. Donc une bonne précision est obtenue à l'égard des temps de calcul. Le schéma elliptique respecte une zone de transition progressive, ce qui permet de modifier un petit nombre d'élément, tandis que les autres modèles transforment quasiment la totalité du maillage. En plus, il est possible d'appliquer la nouvelle technique de raffinement dans n'importe quelle région du maillage, ce qui n'est pas le cas pour toutes les autres méthodes. Dans des conditions idéales, le schéma de raffinement elliptique local génère un maillage conforme aux exigences sur la distorsion des éléments. Les autres techniques permettent la génération d'éléments de formes distordues supérieures aux limites permises, et ce, même dans des conditions parfaites.

Pour terminer, des exemples d'applications typiques confirment l'efficacité du générateur de maillage et du schéma de raffinement elliptique local dans des cas concrets, car les résultats obtenus sont satisfaisants.

Les recommandations mentionnées ci-après ont pour but de souligner que les travaux entrepris dans cette maîtrise peuvent être poursuivis et complétés sous différents aspects dans des études ultérieures.



## RECOMMANDATIONS

Dans l'optique d'approfondir et d'élargir les connaissances dans la poursuite du travail entrepris lors de cette recherche, il y a lieu de mentionner la possibilité d'améliorer la technique de génération de maillage par krigeage par des ajouts ou des modifications (optimisation du code) à l'algorithme existant ou par des études plus poussées concernant certains points. Voici des points, de plus ou moins grande envergure, recommandés pour la continuité de ce projet :

- Automatiser de façon adaptative le raffinement elliptique local de maillage.
- Poursuivre le développement de la méthode de maillage par krigeage pour les solides et inclure une méthodologie pour les solides comportant des trous.
- Rendre le raffinement de maillage elliptique opérationnel et robuste sur les frontières et en trois dimensions, c'est-à-dire en respectant les exigences de conformités sur la distorsion à propos de la forme des éléments.
- Kriger indépendamment chaque profil pour assurer une redistribution uniforme des points basée sur la longueur de la courbe pour obtenir un maillage structuré plus régulier.
- Étudier différents types de dérives et de covariances pour le krigeage permettant d'avoir des modélisations plus fidèles des contours.
- Analyser tous les éléments générés, selon les critères de l'« Aspect Ratio », de l'angle obtus et de l'angle de parallélisme pour deux côtés opposés, pour éliminer la possibilité de générer un maillage contenant des « Bad Shape Elements » en modifiant la position de certains nœuds stratégiquement.

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. Champliaud, H., *Document pour l'examen sythèse : Analyse par éléments finis du formage de capsules d'étanchéité*. 1995, École de technologie supérieure: Montréal. p. 52.
2. Bathe, K.-J., *Finite element procedures*. 1996, Upper Saddle River, N.J.: Prentice-Hall. xiv, 1037.
3. Buchanan, G.R., *Finite Element Analysis*. Schaum's outlines series. 1994: McGraw-Hill. 264.
4. Cook, R.D., *Concepts and applications of finite element analysis*. 4th ed. 2001, New York, NY: J. Wiley. xvi, 719.
5. Dhatt, G. and G. Touzot, *Une presentation de la methode des elements finis*. 1981, Sainte-Foy et Paris: Presses de l'Université Laval et Maloine. 543.
6. Rowe, G.W., et al., *Finite-Element Plasticity and Metal Forming Analysis*. 1991, Cambridge: Cambridge University Press.
7. Kobayashi, S., S.-I. Oh, and T. Altan, *Metal Forming and the Finite Element Method*. 1989, New York: Oxford University Press.
8. Aronson, R.B., *Forward thinkers take to reverse engineering*. *Manufacturing Engineering*, 1996. 117(5): p. 7.
9. Ma, W. and J.P. Kruth, *Parameterization of randomly measured points for least squares fitting of B-spline curves and surfaces*. *Computer Aided Design*, 1995. 27(9): p. 663-675.
10. Ma, W. and J.-P. Kruth, *NURBS curve and surface fitting for reverse engineering*. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 1998. 14(12): p. 918-927.
11. Lee, K.-Y., et al., *An algorithm for automatic 2D quadrilateral mesh generation with line constraints*. *CAD Computer Aided Design*, 2003. 35(12): p. 1055-1068.

12. Nagakura, S., et al. *Automatic quadrilateral mesh generation for FEM using dynamic bubble system*. in *Ninth Biennial Electromagnetic Field Computation (CEFC), Jun 4-7 2001*. 2001. Milwaukee, WI: Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc.
13. George, P.-L. and H. Borouchaki, *Delaunay triangulation and meshing application to finite elements*. 1998, Paris: Hermès. vii, 413.
14. Bastian, M. and B.Q. Li, *An efficient automatic mesh generator for quadrilateral elements implemented using C++*. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2003. **39**(9): p. 905-930.
15. Lo, S.H. and C.K. Lee, *Generation of gradation meshes by the background grid technique*. *Computers and Structures*, 1994. **50**(1): p. 21-32.
16. Champlaud, H., *Analyse par éléments finis du sertissage de capsules d'étanchéité*. 2000, École de technologie supérieure: Montréal.
17. Champlaud, H. and N.V. Lê. *Finite Element Analysis of Crowning Sealing Caps*. in *2000 Ansys Conference*. 2000. Pittsburgh.
18. TrueGrid, *A Quality Mesh*, <http://www.truegrid.com/quality.html> (Consulté le 23 février 2004).
19. George, P.L., *Automatic mesh generation application to finite element methods*. 1991, Chichester et Paris: John Wiley & Sons et Masson. ix, 333 , [4] de pl. (en coul.).
20. Khawaja, A. and Y. Kallinderis, *Hybrid grid generation for turbomachinery and aerospace applications*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2000. **49**(1): p. 145-166.
21. Lackner, R. and H.A. Mang. *Mesh generation and mesh refinement procedures for the analysis of concrete shells*. in *ECT and CST, Sep 1 2000*. 2002. Leuven, Belgium: Elsevier Science Ltd.
22. Kwak, D.-Y., J.-S. Cheon, and Y.-T. Im, *Remeshing for metal forming simulation - Part I : Two-dimensional quadrilateral remeshing*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002. **53**: p. 2463-2500.

23. Kwak, D.-Y. and Y.-T. Im, *Remeshing for metal forming simulation - Part II : Three-dimensional hexadral mesh generation*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2002. **53**: p. 2501-2528.
24. Kwak, D.-Y. and Y.-T. Im, *Hexahedral mesh generation for remeshing in three-dimensional metal forming analyses*. Journal of Materials Processing Technology, 2003. **138**: p. 531-537.
25. Zhu, J. and M. Gotoh, *Automatic remeshing of 2D quadrilateral elements and its application to continuous deformation simulation: part I. remeshing algorithm*. Journal of Materials Processing Technology, 1999. **87**(1-3): p. 165-178.
26. Gotoh, M. and J. Zhu, *Automatic remeshing of 2D quadrilateral elements and its application to continuous deformation simulation: part II. applications*. Journal of Materials Processing Technology, 1999. **87**(1-3): p. 179-191.
27. Krige, D.G., *Statistical approach to some basic mine valuation problems on Witwatersrand*. Chemical, Metallurgical, and Mining Society of South Africa -- Journal, 1952. **53**(2): p. 43-44.
28. Matheron, G., *INTRINSIC RANDOM FUNCTIONS AND THEIR APPLICATIONS*. 1973. **5**(3): p. 439-468.
29. Trochu, F., *Contouring program based on dual kriging interpolation*. Engineering with Computers (New York), 1993. **9**(3): p. 160-177.
30. Poirier, C. and R. Tinawi, *Finite element stress tensor fields interpolation and manipulation using 3D dual kriging*. Computers and Structures, 1991. **40**(2): p. 211-222.
31. Champlaud, H., F. Duchaine, and N.V. Lê. *Structured 3D Solid Mesh of Complex Thin Parts Using Dual Kriging Interpolation*. in *29th International Conference on Computers & Industrial Engineering*. 2001.
32. Swokowski, E.W., *Analyse*. 5e éd. ed. 1993, Bruxelles: De Boeck-Wesmael. xv, 1053, 106.

33. Sullivan, J.M.J. and J.Q. Zhang, *Adaptive mesh generation using a normal offsetting technique*. Finite Elements in Analysis and Design, 1997. **25**(3-4 pt 2): p. 275-295.
34. Champlaud, H., F. Duchaine, and N.V. Lê. *Controlling Normal Direction and Thickness of Interpolated Surfaces of Complex Thin Parts*. in *4th International Conference on Industrial Automation*. 2003. Montréal.
35. Borouchaki, H., et al., *Adaptive remeshing for ductile fracture prediction in metal forming*. C. R. Mecanique, 2002. **330**: p. 709-716.
36. Li, X.-Y., S.-H. Teng, and A. Üngör, *Simultaneous Refinement and Coarsening for Adaptive Meshing*. Engineering with Computers, 1999. **15**: p. 280-291.
37. Ansys(R), *Theory Reference, chapter 13.7, Element Shape Testing*. release 6.1.
38. Bazergui, A., et al., *Resistance des matériaux*. 2e ed. 1993, Montréal, Québec: Éditions de l'École Polytechnique de Montréal. xii, 595.
39. Diekmann, R., et al., *Aspect Ratio for Mesh Partitionning*. Euro-Par'98, 1998. LNCS 1470: p. 347-351.
40. Shigley, J.E. and C.R. Mischke, *Mechanical engineering design*. 5th ed. McGraw-Hill series in mechanical engineering. 1989, New York, N.Y.: McGraw-Hill. xxv, 779.